

# WEATHER DERIVATIVES: THEORY AND APPLICATIONS IN AGRIBUSINESS

zur Erlangung des akademischen Grades

doctor rerum agriculturalarum

(Dr. rer. agr.)

eingereicht an der  
Landwirtschaftlich-Gärtnerischen Fakultät  
der Humboldt-Universität zu Berlin

von  
Dipl. Ing. agrar. Wei Xu  
geb. am 10. September 1968 in Lanzhou, VR China

Präsident der Humboldt Universität zu Berlin  
Prof. Dr. Christoph Marksches

Dekan der Landwirtschaftlich-Gärtnerischen Fakultät  
Prof. Dr. Dr. h.c. Otto Kaufmann

Gutachter:  
Prof. Dr. Martin Odening, Humboldt-Universität zu Berlin  
Prof. Dr. Oliver Musshoff, Georg-August-Universität Göttingen  
Prof. Dr. Ernst Berg, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Berlin, den 9. September 2008



## Abstract

Weather is a major factor of uncertainty for agriculture. The effects of climate change means that it is likely that in the future there will be increased fluctuations in weather patterns and extreme meteorological events will become more regular. In this context, the development of weather risk management instruments plays an important role in the stabilising of incomes in the agricultural sector, both in developed economies as well as in developing countries.

Since the mid-nineties, so-called weather derivatives have been emerged on the market which enables participants in the market to exchange weather risks. This work aims to investigate the implementation possibilities of weather derivatives in agriculture. A range of methodological preliminary investigations will be carried out. First of all it is necessary to find a statistical model which describes the uncertainty of observed weather events (e.g. temperature or precipitation). Secondly, the relationship between weather and agricultural production needs to be mapped. Thirdly, a theoretical model needs to be devised which is capable of pricing the weather derivatives.

The hedging effectiveness of a weather derivative can be determined from the point of view of an agricultural producer using the model components described above. This study will use the example of grain producers in Germany. It will demonstrate that hedging effectiveness and with it willingness to pay for weather derivatives depends on the product and region. A pronounced basis risk means that it is unlikely that weather derivatives will be widely used by farmers in Germany. Their application potential for agricultural insurers and reinsurers, however, seems greater, since they can use weather derivatives to transfer a part of their systematic risk from agricultural income insurance onto the capital market.

## Zusammenfassung

Wetter stellt für die Landwirtschaft einen Hauptunsicherheitsfaktor dar. Angesichts der Klimaveränderung gilt es als wahrscheinlich, dass Wetterschwankungen und die Häufigkeit extremer Wetterereignisse in Zukunft zunehmen werden. Vor diesem Hintergrund spielt die Entwicklung von Wetterrisikomanagementinstrumenten eine wichtige Rolle zur Einkommensstabilisierung in der Landwirtschaft sowohl in entwickelten Volkswirtschaften als auch in Entwicklungsländern.

Seit Mitte der neunziger Jahre werden auf Finanzmärkten sogenannte Wetterderivate angeboten, die den Austausch von Wetterrisiken zwischen Marktteilnehmern ermöglichen. Zielsetzung der vorliegenden Arbeit ist es, die Einsatzmöglichkeiten von Wetterderivaten in der Landwirtschaft zu untersuchen. Dazu sind verschiedene methodische Vorarbeiten zu leisten. Erstens, wird ein statistisches Modell benötigt, das die Unsicherheit des betrachteten Wetterereignisses (z.B. Temperatur oder Niederschlag) beschreibt. Zweitens, muss der Zusammenhang zwischen Wetter und landwirtschaftlicher Produktion abgebildet werden. Drittens, schließlich bedarf es eines theoretischen Modells, um das Wetterderivat zu bepreisen.

Liegen die genannten Modellkomponenten vor, kann die Hedgingeffektivität eines Wetterderivats aus Sicht eines landwirtschaftlichen Produzenten bestimmt werden. Dies geschieht in der vorliegenden Arbeit beispielhaft für Getreideproduzenten in Deutschland. Es zeigt sich, dass die Hedgingeffektivität und damit die Zahlungsbereitschaft für Wetterderivate produkt- und regionsspezifisch ist. Angesichts eines ausgeprägten Basisrisikos ist es unwahrscheinlich, dass Wetterderivate in Deutschland eine breite Anwendung durch Landwirte erfahren werden. Ihr Anwendungspotenzial bei landwirtschaftlichen Versicherern und Rückversicherern erscheint dagegen höher, da diese mit Hilfe von Wetterderivaten einen Teil ihres systematischen Risikos aus landwirtschaftlichen Ertragsversicherungen auf den Kapitalmarkt transferieren können.

## **Keywords & Schlagwörter**

Keywords:

Weather derivatives, incomplete markets, hedging effectiveness, basis risk, securitization

Schlagwörter:

Wetterderivate, unvollständiger Markt, Hedging-Effektivität, Basisrisiko, Verbriefung

# Contents

<b>Abstract</b>	<b>i</b>
<b>Zusammenfassung</b>	<b>ii</b>
<b>Keywords &amp; Schlagwörter</b>	<b>iii</b>
<b>Preface</b>	<b>vi</b>
 <b>I. Zur Bewertung von Wetterderivaten als innovative Risikomanagementinstrumente in der Landwirtschaft</b>	 <b>1</b>
1 Einführung	3
2 Wirkungsanalysen von Wetterderivaten	5
3 Bewertung von Wetterderivaten	8
4 Vergleich der Bewertungsverfahren anhand numerischer Beispiele	16
5 Schlussfolgerungen	26
6 Literatur	28
 <b>II. Analysis of Rainfall Derivatives Using Daily Precipitation Models: Opportunities and Pitfalls</b>	 <b>30</b>
1 Introduction	31
2 Valuation of Weather Derivatives	33
3 Statistical Modeling of Weather Indexes	35
4 A Daily Precipitation Model	37
5 Application: Valuation of Rainfall Options for Grain Producers in Northeast Germany	39
6 Conclusions	52
7 References	53
8 Appendix	57
 <b>III. Zur Quantifizierung des Basisrisikos von Wetterderivaten</b>	 <b>59</b>
1 Einleitung	60
2 Datengrundlage und methodische Vorgehensweise	62
3 Ergebnisse	69
4 Zusammenfassung und Ausblick	72
5 Literatur	73
 <b>IV. Indifference Pricing of Weather Derivatives</b>	 <b>74</b>
1 Introduction	75

---

2	Pricing in Incomplete Markets	77
3	An Indifference Pricing Model for Weather Derivatives	81
4	Empirical Application: The demand of German grain producers for weather insurance	86
5	Results	89
6	Conclusions	95
7	References	96
<b>V.</b>	<b>Optimal Design of Weather Bonds</b>	<b>99</b>
1	Introduction	100
2	Theoretical framework	102
3	Securitization of weather risk in northeast Germany	108
4	Conclusions	114
5	References	114

## PREFACE

It is well known that weather is an important production factor in agriculture. Unfortunately, this production factor can barely be controlled. In fact, weather risks are a major source of uncertainty in agriculture, and it appears that volatilities of temperature and precipitation have increased in the last decade due to global climate changes. Drought or excessive rain is responsible for poor harvests all over the world. Perhaps the most obvious impact of the weather risk is on crop yields, but its relevance is not limited to crop production. The performance of livestock farms, the turnover of processors, the use of chemicals and fertilizers, and the demand for many food products also depends on the weather. Hence, large sections of the agribusiness are affected by weather risks. In the EU, the problem of production risk is even more relevant since price volatility is expected to increase due to recent policy reforms.

Traditionally, in agribusiness, producers have attempted to compensate for the negative economic consequences of bad weather by purchasing classic yield or crop insurance. However, in the mid-nineties, a new class of instruments has emerged, namely weather derivatives. Generally speaking, weather derivatives and index-based weather insurance are financial instruments that allow to trade weather related risks. These instruments include futures, options, and swaps. The advantage of using weather derivatives, index-based weather insurance, or classic agricultural insurance is that their payoffs are determined in a transparent manner. Moreover, because of the objective nature of the weather records, they are not affected by moral hazards or adverse selection, which can create serious problems for insurance companies.

While the first transactions were based on bilateral contracts, nowadays, standardized products are also traded on exchanges, e.g., the Chicago Mercantile Exchange (CME). Until now, most transactions occur in the energy sector, but some promising applications also exist in the agricultural sector. For example, the World Bank has launched weather-related insurance projects in Morocco and Nicaragua. In the Canadian provinces of Alberta and Ontario, weather risk instruments have also been used to hedge production risks. The question that arises is whether and to what extent weather derivatives can play the role of useful risk management tools in agribusiness. This issue is important not only for farm managers but also for policy makers, since income stabilization in agriculture is frequently considered as a governmental task.



The success of weather derivatives as risk management tools in agriculture depends heavily on their capability to reduce the risk exposure of farmers, i.e., the hedging effectiveness of weather derivatives. Analyzing the hedging effectiveness of weather derivatives requires the resolution of three interrelated problem areas, namely, the statistical modeling of relevant weather variables or indexes, the quantification of the relationship between weather variables and production, and the development of an appropriate pricing approach. The last issue is discussed in chapters I and IV. The problem of pricing weather derivatives originates from the fact that weather is not a tradable asset and thus standard no-arbitrage-models of stochastic finance cannot be applied easily. Different pricing methods for financial derivatives and insurance products are introduced in chapter I. The application of these methods to case studies in agriculture reveals significant differences in the resulting prices. Chapter IV initiates this discussion and suggests a rather new approach for pricing derivatives in incomplete markets, namely, indifference pricing.

Chapter II deals with the statistical aspects of modeling the weather risk. While there is comprehensive literature on temperature modeling, less is known about the properties of precipitation models. Rainfall, however, is an important production factor for crop yields. Thus, we calibrate and analyze a daily rainfall model, which has been suggested in the meteorological literature. Simpler statistical methods such as historical simulation and index value simulation serve as benchmarks for evaluating the outcome. We discover that the choice of statistical approach may lead to considerable differences in the estimation results. Moreover, daily precipitation models should be used with some caution in the context of derivative pricing because they tend to underestimate rainfall variability.

Chapter III is devoted to the analysis of basis risk that is inherent to weather derivatives. We decompose basis risk into production basis risk and geographical basis risk. This decomposition is important since both sources of basis risk have to be addressed in different ways. Production basis risk can be controlled through the specification of an appropriate weather index, whereas geographical basis risk could be mitigated by a dense network of reference weather stations. Our analysis shows that farmers' willingness to pay for weather insurance depends on the production program and varies between regions. This finding suggests the development of tailored insurance products, which, however, lead to higher developing costs.

Even if the farmers' willingness to pay for weather derivatives is limited, this does not imply that these instruments are ineffective in agribusiness. Instead of considering weather derivatives as an alternative to traditional crop insurance, they could also be used by insurers or reinsurers for transferring systemic risk stemming from weather events to the capital market. This notion is examined in chapter V. The structure of a weather bond is optimally designed in a utility-maximizing framework that involves farmers, insurers, and capital market investors. The approach is illustrated by an example of securitizing drought risk in crop production

in Germany. Since reinsurance costs constitute a major cost component of insurance premiums, minimizing these costs could decrease the frequently observed gap between the willingness to pay and the willingness to accept for insurance.

# **I. ZUR BEWERTUNG VON WETTERDERIVATEN ALS INNOVATIVE RISIKOMANAGEMENTINSTRUMENTE IN DER LANDWIRTSCHAFT**

\*

von

Oliver Mußhoff<sup>1)</sup>, Martin Odening<sup>2)</sup> und Wei Xu<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>Georg-August-Universität Göttingen

Department of Agricultural Economics and Rural Development

<sup>2)</sup>Humboldt-Universität zu Berlin

Department of Agricultural Economics and Social Sciences

---

\* Published in: Agrarwirtschaft- German Journal of Agricultural Economics 54 (4/2005): 197-209 (in German).

---

## **Zur Bewertung von Wetterderivaten als innovative Risikomanagementinstrumente in der Landwirtschaft**

### **Zusammenfassung**

Die Bedeutung des Wetters als Risikofaktor in der Landwirtschaft ist seit langem bekannt. Zur Reduzierung wetterbedingter Risiken wurden in den letzten Jahren insbesondere Ertragsausfallversicherungen diskutiert. Ein relativ neues Instrument zur Steuerung des Mengenrisikos stellen sog. „Wetterderivate“ dar. Wetterderivate sind Finanzmarktprodukte, wie z.B. Forward-Kontrakte, Futures, Optionen oder Swaps, die sich auf Temperaturindices, Niederschlagsindices oder andere objektiv messbare Wettervariablen beziehen. Obwohl Wetterderivate gegenüber traditionellen Versicherungen Vorteile aufweisen, ist der Markt für diese Produkte in der Landwirtschaft noch relativ klein. Dies wird u.a. darauf zurückgeführt, dass es schwierig ist, Wetterderivate „korrekt“ zu bepreisen. In der Finanzderivatetheorie entwickelte präferenzfreie Bewertungsverfahren sind wegen der Nichthandelbarkeit des Wetters nicht oder nur eingeschränkt einsetzbar. In diesem Beitrag wird exemplarisch anhand eines Beispiels mit realen Daten die Anwendung verschiedener Verfahren zur Bewertung von Wetterderivaten verdeutlicht. Anschließend werden Schlussfolgerungen für die Eignung der verschiedenen Methoden bei unterschiedlichen Bewertungssituationen abgeleitet. Die hier behandelte Fragestellung ist nicht nur für Landwirte, sondern auch für potenzielle Anbieter von Wetterderivaten (also z.B. Versicherungen, Banken, WTB Hannover usw.) relevant.

### **Schlüsselwörter**

Wetterderivate; Optionspreisbewertung; versicherungsmathematische Verfahren; kapitalmarkttheoretische Verfahren

### **Abstract**

The importance of weather as a production factor in agriculture is well established long time and a significant portion of yield fluctuations is caused by weather risks. Traditionally, farmers have tried to hedge against unfavorable weather using insurance, such as crop insurance. In recent years a new class of instruments, so called weather derivatives, have emerged. They allows to reduce weather based risks as well. Weather derivatives are financial market products such as forwards, futures, options and swaps that have a weather component such as temperature or rainfall. Although weather derivatives have some advantages compared to traditional insurance, their trading volume is still rather small. One reason (among others) for why potential users hesitate to enter the market are the difficulties to determine a fair price for these products. Financial pricing methods such as the Black-Scholes formula cannot be directly applied since weather is not a tradable asset. In this article, various pricing methods are

investigated and applied to actual weather data. One important finding is that there are considerable differences between the pricing methods. We identify the strengths and weaknesses of the pricing methods and give some recommendations for their application. Our results may be relevant not only for producers but also for potential sellers of weather derivatives.

### **Keywords**

Weather Derivatives; Option Pricing; Actuarial Methods; Financial Methods

## **1 Einführung**

In einem jüngst in der „Agrarwirtschaft“ erschienenen Beitrag werfen BERG et al. (2005) die Frage auf, inwieweit Wetterderivate, d.h. Finanzmarktprodukte, die dem Austausch von Wetterrisiken dienen, ein nützliches Instrument für das Risikomanagement in der Landwirtschaft darstellen. Diese Frage ist zweifellos relevant. Die Wetterabhängigkeit der landwirtschaftlichen Produktion weltweit ist offensichtlich. Für die westeuropäische Landwirtschaft im Besonderen haben die extremen Wetterereignisse der vergangenen Jahre die Bedeutung des Wetters verdeutlicht. Entsprechend ist der Ruf nach geeigneten Maßnahmen zur Risikominderung laut geworden (LEISINGER 2003). Dabei ist zu beachten, dass sich Wetterderivate von traditionellen Instrumenten des Risikomanagements, insbesondere von Versicherungen, in verschiedener Hinsicht unterscheiden (ALATON et al. 2002; CAMPBELL und DIEBOLD 2002):

- Versicherungen dienen überwiegend der Abwehr von Schäden aus katastrophenähnlichen Ereignissen (Überschwemmung, Hagel, Sturm, Blitz). Wetterderivate lassen sich so gestalten, dass Zahlungen auch bei weniger drastischen Ereignissen (z.B. unzureichende Niederschläge) ausgelöst werden.<sup>1</sup>
- Um Versicherungsleistungen zu erhalten, muss der Versicherungsnehmer den entstandenen Schaden nachweisen. Bei Wetterderivaten werden Zahlungen automatisch bei Eintreten eines objektiv messbaren Ereignisses ausgelöst und weisen somit gegenüber klassischen Versicherungspolicen administrative Vorteile auf.
- Wetterderivate sind im Gegensatz zu Versicherungsverträgen nicht von der Moral-Hazard-Problematik betroffen.<sup>2</sup>
- Ein Markt für Wetterderivate erlaubt es, Unternehmen zusammenzuführen, für die sich entgegengesetzte Konsequenzen aus bestimmten Wetterereignissen ergeben. Durch den

---

<sup>1</sup> Der Übergang von Wetterderivaten zu Versicherungsprodukten ist fließend. Beispielsweise greifen auch sog. „Weather-Index-Based-Insurances“ im Gegensatz zu klassischen Versicherungsprodukten nicht nur bei witterungsbedingten Extremschäden (MCCARTHY 2003).

<sup>2</sup> In anekdotischer Form wird von dem Versuch des Verkäufers einer Niederschlagsoption berichtet, drohende Verluste durch die Erzeugung künstlichen Regens abzuwenden (CAMPBELL und DIEBOLD 2002).

Abschluss eines entsprechenden Vertrages können die Risiken gegenseitig gehedgt werden.

- Für Wetterderivate bilden sich Sekundärmärkte, die auch für institutionelle Investoren attraktive Anlagemöglichkeiten bieten können, da die dort gehandelten Risiken relativ schwach mit dem systematischen Risiko einer Volkswirtschaft korreliert sind.

Auch zu herkömmlichen Forward- und Futureskontrakten auf landwirtschaftliche Produkte bestehen Unterschiede, da diese der Reduzierung von Preisrisiken dienen, während Wetterderivate auf wetterbedingte Ertrags- und Absatzschwankungen, d.h. die mengenbezogene Erlös-komponente, abstellen. Insofern sind Commodity Futures und Wetterderivate als komplementäre Instrumente zu sehen.

Aus dem bislang Gesagten folgt nicht, dass die von BERG et al. (2005) gestellte Frage positiv zu beantworten ist, sondern nur, dass es sinnvoll erscheint, sie zu stellen. Sicher hängen die Einsatzmöglichkeiten von Wetterderivaten von den klimatischen Bedingungen einer Region und vom Produktionsprogramm des Betriebes ab. Eben diese zu erwartende Differenzierung macht es notwendig, einzelbetriebliche Wirkungsanalysen durchzuführen.

Der Beitrag verfolgt das Ziel, alternative Verfahrensweisen bei der einzelbetrieblichen Wirkungsanalyse zu beschreiben und die bestehenden Unterschiede zu verdeutlichen. Der Schwerpunkt liegt dabei auf dem Vergleich verschiedener Bewertungsverfahren. Die Auseinandersetzung mit Bewertungsverfahren für Wetterderivate ist nicht nur aus theoretischer Sicht interessant, da diese Produkte einige Besonderheiten aufweisen, die eine direkte Übertragung von Bewertungsmethoden für Finanzderivate erschwert. Vielmehr wird die Bereitstellung transparenter Verfahren zur Bepreisung als notwendige Voraussetzung für das Zustandekommen einer ausreichenden Liquidität auf den noch jungen Märkten für Wetterderivate angesehen (DISCHEL 2002). Ziel dieses Beitrages ist es nicht, eine vollständige Wirkungsanalyse für bestimmte landwirtschaftliche Betriebe durchzuführen. Vielmehr soll eine Vorleistung für solche Untersuchungen zur Verfügung gestellt werden, indem verschiedene Bewertungsverfahren auf ihre Tauglichkeit unter unterschiedlichen Anwendungsvoraussetzungen untersucht werden. Es handelt sich quasi um eine Bewertung von Bewertungsverfahren. Die Kenntnis der Stärken und Schwächen der einzelnen Verfahren hilft potenziellen Anwendern, ihre Wirkungsanalysen sachgerecht zu gestalten.

Der Hauptteil des Beitrages besteht aus drei Abschnitten. In Abschnitt 2 wird zunächst kurz die Vorgehensweise einer einzelbetrieblichen Wirkungsanalyse von Wetterderivaten beschrieben. Auf eine Erläuterung der grundsätzlichen Wirkungsweise der verschiedenen Typen von Wetterderivaten wird unter Verweis auf den Beitrag von BERG et al. (2005) verzichtet. In Abschnitt 3 werden verschiedene Verfahren zur Bewertung von Wetterderivaten und zur Modellierung von Wetterindices vorgestellt, von denen einige in Abschnitt 4 aufgegriffen und

in einem Beispiel mit realen Daten vergleichend gegenübergestellt werden. Anhand der Ergebnisse werden Schlussfolgerungen für die Eignung der verschiedenen Methoden gezogen.

## 2 Wirkungsanalysen von Wetterderivaten

Obwohl es erst sehr wenige praktische Anwendungen von Wetterderivaten im Agrarbereich gibt, finden sich in der Literatur bereits einige Arbeiten, die versuchen deren Anwendungspotenzial für die Landwirtschaft abzuschätzen (siehe Tabelle 1).

**Tabelle 1: Wirkungsanalysen von Wetterderivaten im Agrarbereich**

Autoren	Risiko	Region	Wettervariable	Derivat
CHEN et al. (2003)	Hitzestress-bedingte Milchmengenverluste	Ohio	Hitzeindex (THI)	Call-Option
BERG et al. (2005)	Ertragsrisiko im Kartoffelanbau	Deutschland	Niederschlagssumme (Mai bis September)	Put- und Call-Option
RICHARDS et al. (2003)	Ertragsrisiko in der Obstproduktion	Kalifornien	CDD, Niederschlagssumme	Call-Option
STOPPA / HESS (2003)	Ertragsrisiko im Weizenanbau	Marokko	saisongewichtete Niederschlagssummen	Put-Option
ASSELDONK / OUDE LANDSINK (2003)	Energiekostenrisiko im Gewächshaus	Niederlande	HDD	Swap
SCHMITZ / STARP (2004)	Energiekostenrisiko im Unterglasanbau	Westeuropa	LIFFE-Saisonindex	Put-Option
TURVEY (2001)	Allgemeines Niederschlagsrisiko	Ontario	Niederschlagssumme (Juni und Juli)	Put-Option

Im Allgemeinen zielen die einzelbetrieblichen Wirkungsanalysen für Wetterderivate darauf ab, zu erkennen, wie sich das Risikoprofil eines Betriebes oder eines Betriebszweiges durch die Nutzung (Kauf oder Verkauf) eines oder mehrerer Wetterderivate(s) verändert. Als Derivattypen kommen Futures bzw. Forwards, Call-Optionen, Put-Optionen und Swaps in Frage, deren Auszahlungen zum Verfallszeitpunkt wie folgt definiert sind:

$$V \cdot (X_\tau - X_0) \text{ (für Futures, long)} \quad (1a)$$

$$V \cdot \max(X_\tau - K, 0) \text{ (für Call-Optionen)} \quad (1b)$$

$$V \cdot \max(K - X_\tau, 0) \text{ (für Put-Optionen)} \quad (1c)$$

$$V \cdot (X_\tau - K) \text{ (für Swaps)} \quad (1d)$$

$X_0$ ,  $X_\tau$  bezeichnen den Wetterindex am Bewertungszeitpunkt 0 bzw. zum Fälligkeitszeitpunkt  $\tau$ ,  $K$  den Ausübungspreis (Strike-Preis) und  $V$  die Tick-Size.

Natürlich können mehrere Derivate miteinander kombiniert werden, was die Erzeugung nicht-linearer Auszahlungsströme erlaubt. Bei der Wirkungsanalyse sind zwei Situationen zu unter-

scheiden: Entweder man beschränkt sich auf die Analyse vorhandener Produkte, die bereits an Finanzmärkten gehandelt werden oder man löst sich von dieser Einschränkung und betrachtet Produkte, die es zwar noch nicht gibt, die es aber geben könnte, beispielsweise auf dem OTC-Markt<sup>3</sup>. Die letztgenannte Betrachtung wird bei der Mehrzahl der Wirkungsanalysen im landwirtschaftlichen Kontext vorgezogen, da die relativ wenigen, aktuell verfügbaren Derivate den Anforderungen der meisten landwirtschaftlichen Unternehmen nur unzureichend entsprechen, in dem Sinne, dass ein hohes Basisrisiko verbleibt. Durch die Analyse fiktiver Instrumente entsteht ein zusätzlicher Freiheitsgrad in Gestalt einer Designaufgabe. Die verschiedenen Kontraktparameter des Wetterderivats (z.B. der Wetterindex oder die Tick-Size) können so gewählt werden, dass das Risikoprofil des Agrarbetriebs bestmöglich beeinflusst wird. Dieser Weg wird beispielsweise von BERG et al. (2005) beschritten.

Eine Wirkungsanalyse setzt natürlich die Definition und die Modellierung eines Wetterindex voraus. Der Phantasie sind hier kaum Grenzen gesetzt; die größte Bedeutung für die Landwirtschaft dürften aber voraussichtlich niederschlagsbezogene Indices haben (z.B. Niederschlagssumme innerhalb einer bestimmten Kumulationsperiode). Demgegenüber dominieren temperaturbezogene Indices derweil den weltweiten Handel, der durch Energieunternehmen getragen wird. Zu nennen sind hier der Heating-Degree-Day-Index (HDD), der Cooling-Degree-Day-Index (CDD) und der Cumulative-Average-Temperature-Index (CAT), die auch in dem empirischen Beispiel in Abschnitt 4 verwendet werden:

- Der HDD ist der akkumulierte Wert der positiven Differenz zwischen einer Referenztemperatur  $R$  (meist 18 Grad Celsius bzw. 65 Grad Fahrenheit) und der Tagesdurchschnittstemperatur  $T$  innerhalb einer Kumulationsperiode  $[t_A, t_E]$ :

$$HDD = \sum_{t=t_A}^{t_E} \max(R - T_t, 0) \quad (2)$$

Futures und Optionen auf den HDD werden im Winter gehandelt.

- Der im Sommer gehandelte CDD ist ganz analog definiert, mit dem Unterschied, dass die positiven Überschreitungen der Referenztemperatur kumuliert werden:

$$CDD = \sum_{t=t_A}^{t_E} \max(T_t - R, 0) \quad (3)$$

- Für in Europa gelegene Städte wird anstelle des CDD- der CAT-Index an der Chicago Mercantile Exchange (CME) und der London International Financial Futures & Option Exchange (LIFFE) verwendet, der die Summe der Tagesdurchschnittstemperaturen innerhalb der Akkumulationsperiode misst:

$$CAT = \sum_{t=t_A}^{t_E} T_t \quad (4)$$

---

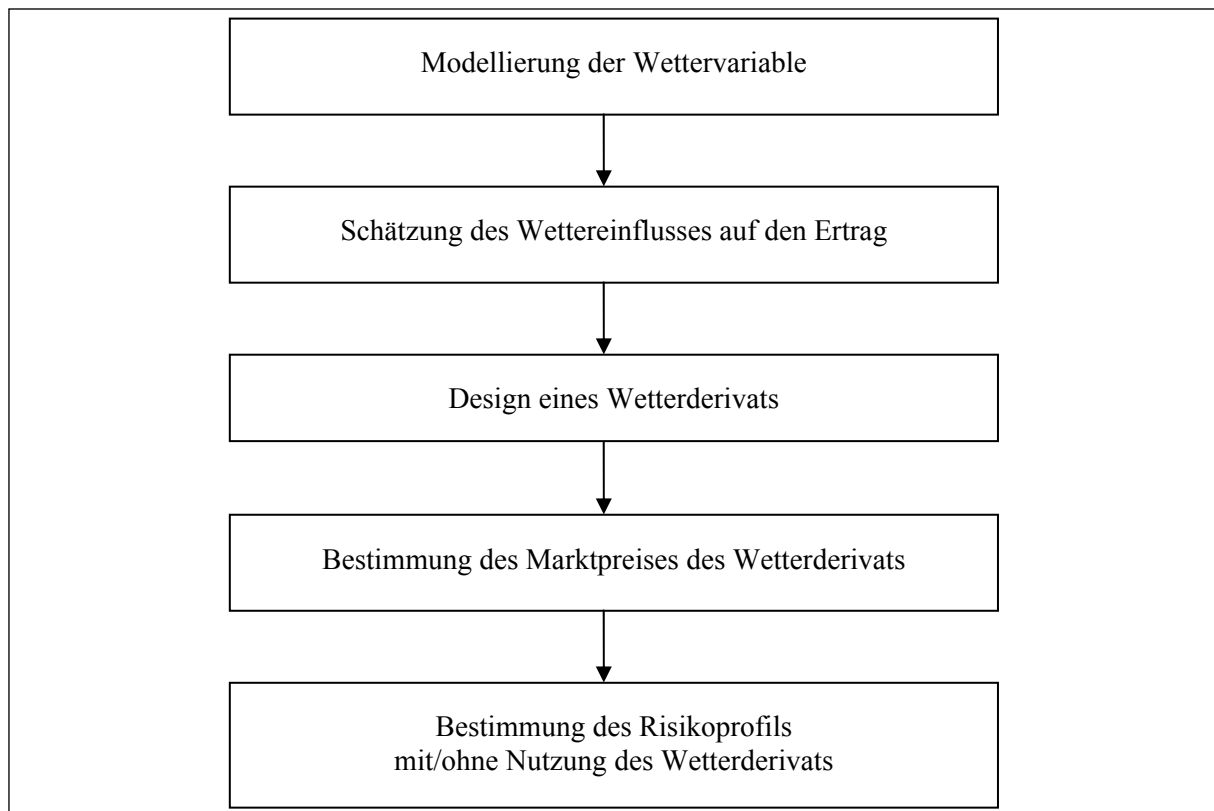
<sup>3</sup> Zur Unterscheidung von börsengehandelten Wetterderivaten und Over-the-Counter (OTC)-Produkten vgl. BERG et al. (2005).



Ein weiteres wesentliches Element der Wirkungsanalyse ist die Schätzung des Zusammenhangs zwischen dem betrachteten Wetterindex und den Erlösen bzw. Kosten der landwirtschaftlichen Produktion. Vielfach wird der Einfachheit halber von konstanten Produktpreisen ausgegangen, so dass die Beziehung zwischen dem Wetterindex und dem physischen Ertrag bzw. dem Faktoraufwand zu schätzen ist. Dies kann auf einfachste Weise durch die Berechnung von Korrelationen oder etwas aufwändiger durch die Schätzung mehrfaktorieller Produktionsfunktionen erfolgen. In solchen Produktionsfunktionen ist der Wettereinfluss nicht, wie sonst üblich, Teil des Störterms, sondern ein (nicht kontrollierbarer) Produktionsfaktor. Aus den Ergebnissen können sich Rückkoppelungen für die o.a. Designaufgabe ergeben, denn gesucht werden natürlich Wettervariablen, die mit dem Ertrag bzw. Aufwand hoch korreliert sind.

Weiterhin muss für den Wetterindex eine statistische Verteilung am Fälligkeitstermin geschätzt werden, um die Verteilung der Rückflüsse des Wetterderivats prognostizieren zu können. Alternativen, um dies zu tun, werden in Abschnitt 3.3 diskutiert. Schließlich, und darauf liegt das Augenmerk in diesem Beitrag, müssen die Kosten für den Erwerb des Derivats ermittelt werden, analog zu der Prämie einer Versicherung. In Frage kommende Verfahren werden in den Abschnitten 3.1 und 3.2 vorgestellt.

Die zuvor genannten Elemente werden letztlich in einer Risikoanalyse zusammengeführt. Dabei werden meist mit Hilfe stochastischer Simulation Verteilungsfunktionen für betriebliche Kennzahlen (Netto-Erlöse, Deckungs- oder Gewinnbeiträge) generiert. Häufig wird dabei nur ein Produkt betrachtet, eine gesamtbetriebliche Betrachtung unter Einbeziehung weiterer Risikoquellen ist aber denkbar und erscheint angesichts von Diversifikationseffekten auch sinnvoll. Die Risikoprofile werden in Form eines Ohne-Mit-Vergleichs gegenübergestellt, und anhand einschlägiger Kriterien (Varianz, Value-at-Risk, Stochastische Dominanz) kann überprüft werden, ob durch den Erwerb des Derivats eine Verbesserung für das Unternehmen zu erreichen ist. Abbildung 1 fasst noch einmal die Schrittfolge einer Wirkungsanalyse für Wetterderivate zusammen.

**Abbildung 1: Elemente einer einzelbetrieblichen Wirkungsanalyse von Wetterderivaten**

### 3 Bewertung von Wetterderivaten

Im vorangegangenen Abschnitt wurde dargelegt, dass der Vorteil eines Wetterderivats als Instrument zur Risikoabsicherung durch den Preis, den der Käufer dafür entrichten muss, mitbestimmt wird. Eine Veränderung des Preises des Wetterderivats führt zu einer Parallelverschiebung des Risikoprofils. Daher soll nun der Frage nach der „richtigen“ Bepreisung von Wetterderivaten nachgegangen werden. Für die Bewertung können verschiedene Methoden herangezogen werden, die sich sowohl in der theoretischen Fundierung als auch in ihrer praktischen Implementierung unterscheiden. Tabelle 2 versucht, die dabei relevanten Unterscheidungsmerkmale zu strukturieren, wobei anzumerken ist, dass nicht alle Ausprägungen miteinander kombinierbar sind.

**Tabelle 2: Unterscheidungsmerkmale von Bewertungsverfahren für Wetterderivate**

Merkmal	Mögliche Ausprägung		
	versicherungsmathematische Modelle	kapitalmarkttheoretische Modelle	
Modelltyp		No-Arbitrage-Modelle	Gleichgewichtsmodelle
Berücksichtigung der Risikoeinstellung	keine	präferenzunabhängige Bewertung (Risk-Neutral-Valuation)	Risikoaversion
Gegenstand der Modellierung	Verteilung des Wetterindex zum Fälligkeitszeitpunkt	stochastischer Prozess	
Art der Verteilung		des Wetterindex	der Wettervariable
Art der Lösung	analytisch	Simulation	

Kontrakte, die den Austausch von Risiken zum Gegenstand haben und deren Auszahlung von unsicheren Zustandsvariablen, wie z.B. Aktienkursen, Kartoffelpreisen, dem Auftreten eines Erdbebens oder der Niederschlagsmenge abhängt, werden als „Contingent-Claims“ bezeichnet. Eine Bewertung solcher Kontrakte kann auf der Grundlage von zwei Theoriegebäuden erfolgen: Erstens versicherungsmathematischen Ansätzen (Actuarial-Methods) und zweitens kapitalmarkttheoretischen Modellen (Financial-Pricing, Contingent-Claim-Analysis). Versicherungsmathematische Modelle leiten Prämien für Derivate aus den zu erwartenden Rückflüssen zuzüglich von Prämien für die Risikoübernahme und Transaktionskosten ab. Kapitalmarkttheoretische Modelle gehen meist von Gleichgewichtsüberlegungen aus und versuchen die Preise für Derivate so zu bestimmen, dass Arbitragefreiheit gegeben ist. Dabei müssen in der Regel vollkommene und vollständige Kapitalmärkte unterstellt werden. Interessanterweise haben sich beide Theorien bislang weitgehend unabhängig voneinander entwickelt, obwohl sie zum Teil ähnliche Zielsetzungen haben. Erst in jüngster Zeit wird auf Zusammenhänge hingewiesen (EMBRECHTS 2000).

Hinsichtlich der Lösbarkeit können die Bewertungsverfahren dahingehend unterschieden werden, ob sie zu einer geschlossenen analytischen Form führen oder nicht. Analytische Verfahren sind einfacher anzuwenden, erfordern aber restriktive Annahmen (z.B. dass die Wettervariable einem geometrischen Brownschen Prozess (GBP) folgt). Ist eine geschlossene Lösung nicht möglich, kann der Wert des Derivates mittels stochastischer Simulation hinreichend genau ermittelt werden. Die stochastische Simulation ist aufwändig, erlaubt aber auch die Bewertung komplexer Derivate (siehe z.B. MÜBHOFF und HIRSCHAUER 2003). Im Folgenden sollen die wichtigsten Modelle kurz erläutert werden.

### 3.1 Versicherungsmathematische Modelle

Versicherungsmathematische Modelle basieren auf der Entscheidungstheorie. Von besonderer Bedeutung ist der sog. „faire Preis“  $\tilde{F}_0$ , der dem Erwartungswert der Schadensverteilung entspricht:

$$\tilde{F}_0 = e^{-r\tau} E(D_\tau) \quad (5)$$

Darin bezeichnet  $D_\tau$  den unsicheren Schaden bzw. die Rückflüsse aus dem Kontrakt,  $e^{-r\tau}$  einen Diskontierungsfaktor mit stetiger Verzinsung und  $r$  den risikolosen Zinssatz. (5) setzt Risikoneutralität voraus. Im relevanten Fall der Risikoaversion gilt dagegen:

$$F_0 = \tilde{F}_0 + \pi, \text{ mit } \pi > 0 \quad (6)$$

Darin bezeichnet  $\pi$  eine Risikoprämie, die der Käufer des Kontrakts bereit ist für die Risikoüberwälzung zu zahlen. Sofern diese Prämie größer ist als die vom Verkäufer geforderte Prämie, kommt ein Vertrag zustande. Obwohl der faire Preis in der Regel kein Gleichgewichtspreis ist, findet (5) vielfach Anwendung bei der Bewertung von Wetterderivaten. In Abschnitt 4.3 kommen wir auf den fairen Preis zurück und erläutern eine mögliche Umsetzung von (5) im Rahmen der sog. Burn-Rate-Methode.

### 3.2 Kapitalmarkttheoretische Modelle

Ein zentrales Ergebnis der Contingent-Claim-Analyse, das auf COX et al. (1985) zurückgeht, stellt die sog. fundamentale Bewertungsgleichung (Fundamental-Valuation-Equation) dar. Dabei handelt es sich um eine partielle Differentialgleichung (PDF), die für jedes Derivat gilt, dessen Wert von einer stochastischen Zustandsvariablen  $X$  (z.B. einem Wetterindex oder einem Aktienkurs) abhängt. Angenommen, die Zustandsvariable  $X$  (synonym: Bezugsobjekt, Underlying, Asset) entwickelt sich gemäß folgendem stochastischen Prozess

$$dX = X m dt + X s dz \quad (7)$$

(7) ist ein GBP mit Driftrate  $m$  und Volatilität  $s$ .  $dz$  kennzeichnet einen Wiener Prozess. Dann lautet die fundamentale Bewertungsgleichung, die der Preis  $F(X, t)$  eines Derivates (z.B. einer Option oder eines Futures) auf  $X$  erfüllen muss:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (m - \lambda s) X \frac{\partial F}{\partial X} + \frac{1}{2} s^2 X^2 \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} = rF \quad (8)$$

Dabei bezeichnen  $r$  den risikolosen Zinssatz und  $\lambda$  den Marktpreis des Risikos, das  $X$  innewohnt. (Zur Herleitung von (8) siehe z.B. HULL 2000: 498 ff.) Um die PDF (8) lösen zu können, werden Randbedingungen benötigt, die sich aus der Auszahlung des Derivats zum

Verfallszeitpunkt  $\tau$  ergeben. Für eine Call-Option ist diese Bedingung durch Formel (1b) gegeben.

Alternativ kann der Preis eines (Wetter)Derivats mittels risikoneutraler Bewertung (Risk-Neutral-Valuation) bestimmt werden. Die allgemeine Bewertungsformel lautet (NEFTCI 1996):

$$F_0 = e^{-r\tau} \hat{E}(D_\tau) \quad (9)$$

$\hat{E}$  deutet an, dass bei der Erwartungswertberechnung das Prinzip der risikoneutralen Bewertung zur Anwendung kommt.

Obwohl (8) und (9) eine unterschiedliche Struktur aufweisen, sind beide Bewertungsansätze inhaltlich äquivalent und führen daher (bei Gültigkeit von (7)) zum selben Preis für das Derivat. (Zum Beweis der Äquivalenz siehe z.B. NEFTCI 1996: 310ff. oder COX et al. 1985: Lemma 4.) Dieser Preis erfüllt die grundlegende Eigenschaft der Arbitragefreiheit. Deswegen werden Bewertungsansätze, die auf (8) oder (9) basieren, auch als No-Arbitrage-Modelle bezeichnet. Demgegenüber haben (5) und (9) dieselbe Struktur, denn in beiden Fällen wird der gegenwärtige Preis eines Derivates als diskontierter Erwartungswert seiner Rückflüsse zum Ausübungszeitpunkt bestimmt. Dennoch führen sie in der Regel nicht zum selben Preis. Der Grund liegt darin, dass für die Erwartungswertbildung unterschiedliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen verwendet werden. Im Gegensatz zu (5) wird in (9) nicht die tatsächliche Wahrscheinlichkeitsverteilung des Underlying verwendet, sondern ein „risikoneutrales“ Wahrscheinlichkeitsmaß. Dieser Maßwechsel bewirkt, dass die Driftrate des stochastischen Prozesses des Underlying um einen Risikoabschlag  $s\lambda$  vermindert wird. Das bedeutet, dass nicht der Erwartungswert der tatsächlichen Rückflüsse des Derivats bestimmt wird, sondern ihr Sicherheitsäquivalent ( $\hat{E}$  statt  $E$ ). Deshalb ist es konsistent, den risikolosen Zinssatz zur Diskontierung zu verwenden.

Der Bewertungsansatz (9) hat gegenüber (8) den Vorteil, dass sich eine Operationalisierung leichter erschließt. So kann der Erwartungswert in (9) einfach und hinreichend genau mittels stochastischer Simulation berechnet werden. Ein großer Vorteil besteht weiterhin darin, dass bei Anwendung der stochastischen Simulation der Erwartungswert praktisch für jeden beliebigen stochastischen Prozess berechnet werden kann, während die Lösung der PDF (8) für andere stochastische Prozesse als (7) sehr kompliziert wird bzw. gar nicht möglich ist. Wegen der inhaltlichen Äquivalenz ist aber in beiden Ansätzen ein identisches konzeptionelles Problem zu lösen und zwar die Bestimmung des Parameters  $\lambda$ , des Marktpreises für Risiko. Hierbei sind drei Situationen zu unterscheiden:

- a)  $X$  ist ein gehandeltes Asset, z.B. eine Aktie. In diesem Fall ist  $\lambda$  leicht zu bestimmen, denn es gilt (HULL 2000: 500):  $(m - r)/s = \lambda$ . Setzt man diese Beziehung in (8) ein, reduziert sich der zweite Term der PDF zu  $rX(\partial F / \partial X)$ . Die risikoneutrale Driftrate ist der

risikolose Zinssatz, und eine explizite Schätzung von  $\lambda$  entfällt. Für eine Call-Option ist die Lösung dieser PDF durch die bekannte Black-Scholes-Bewertungsgleichung gegeben (BLACK und SCHOLES 1973):

$$F_0^{call} = c = X_0 N(d_1) - Ke^{-r\tau} N(d_2), \text{ mit} \quad (10)$$

$$d_1 = (\ln(X_0 / K) + (r + s^2 / 2)\tau) / s\sqrt{\tau} \text{ und } d_2 = d_1 - s\sqrt{\tau}$$

Darin bezeichnet  $N(\cdot)$  die Standardnormalverteilung. Dieser Fall ist leider für die Bewertung von Wetterderivaten praktisch irrelevant, da Wettervariablen nicht handelbar sind: „You can't buy a sunny day“.

- b) Es werden Futures-Kontrakte für das Underlying gehandelt. Diese Situation ist für einige Wetterindices (z.B. Degree-Day-Indices) und für einige größere Städte gegeben. In diesem Fall kann Black's Bewertungsformel für Optionen auf Futures angewendet werden (BLACK 1976):

$$c = e^{-r\tau} (f_0 N(d_1) - KN(d_2)), \text{ mit} \quad (11)$$

$$d_1 = (\ln(f_0 / K) + (s^2 / 2)\tau) / s\sqrt{\tau} \text{ und } d_2 = d_1 - s\sqrt{\tau}$$

$f_0$  bezeichnet die Notierung des Futures zum Zeitpunkt 0.

- c) Weder das Underlying selbst, noch Futures auf das Underlying werden gehandelt. Diese Situation trifft im Gegensatz zu Finanzderivaten für die meisten Wetterderivate zu. Die Lösung der PDF für eine Call-Option lautet dann (HULL 2000: 275)<sup>4</sup>:

$$c = X_0 e^{-q\tau} N(d_1) - Ke^{-r\tau} N(d_2), \text{ mit} \quad (12)$$

$$d_1 = (\ln(X_0 / K) + ((r - q) + s^2 / 2)\tau) / s\sqrt{\tau}, \quad d_2 = d_1 - s\sqrt{\tau} \text{ und } q = r - (m - \lambda s)$$

Zu beachten ist, dass der Marktpreis für das Wetterrisiko  $\lambda$  zur Bewertung des Derivats gemäß (12) bekannt sein muss.

In der Literatur werden verschiedene Vorschläge gemacht, um (12) zu operationalisieren, d.h. den Marktpreis des Wetterrisikos zu bestimmen. Im Folgenden werden drei Vorschläge genannt:

- aa) TURVEY (2002) bezieht sich auf das Capital-Asset-Pricing-Modell und definiert den Marktpreis für Wetterrisiko als

$$\lambda = \frac{r_m - r}{s_m} \beta \quad (13)$$

mit  $r_m$  und  $s_m$  als erwartete Rendite bzw. Volatilität eines Marktportfolios.  $\beta$  misst den Zusammenhang von Wetterrisiken und Kapitalmarktrisiken. TURVEY unterstellt, dass

<sup>4</sup> Ein weiterer Ansatz zur Bewertung optionsähnlicher Derivate, der keine Handelbarkeit des Underlying bzw. Replizierbarkeit voraussetzt, wird von CHAMBERS and QUIGGIN (2004) vorgeschlagen.

beide unkorreliert sind, d.h. ein „Wetterbeta“ von Null vorliegt. Dies impliziert ein  $\lambda$  von Null. Nimmt man weiterhin eine Driftrate des Wetterindex von Null an, ergibt sich wiederum die Bewertungsformel (11) von BLACK (1976) für Optionen auf Futures. Die Annahme eines Marktpreises für Wetterrisiken von Null wird von RICHARDS et al. (2004) allerdings mit dem Hinweis kritisiert, dass zwar der Kapitalmarkt nicht das Wetter beeinflusst, mit Blick auf die Wetterabhängigkeit vieler Branchen der Volkswirtschaft eine umgekehrte Beeinflussung aber durchaus stattfindet.

- bb) ALATON et al. (2002) greifen auf Preise für bereits gehandelte Wetterderivate zurück. Die Bewertungsformeln (8) bzw. (9) werden mit Hilfe des Parameters  $\lambda$  so kalibriert, dass die berechneten Preise mit den in der Realität beobachteten Preisen für das Wetterderivat übereinstimmen. Dieses Vorgehen entspricht dem Konzept der impliziten Volatilität, hier bezogen auf die risikoneutrale Driftrate  $m - \lambda s$ .
- cc) CAO und WEI (1999) wählen - LUCAS (1978) folgend - ein sog. Gleichgewichtsmodell zur Preisbestimmung von Wetterderivaten, das auf einer intertemporalen Nutzenmaximierung basiert. Die Bewertung erfolgt hierbei nicht präferenzunabhängig, sondern erfasst explizit die Risikoeinstellung der Wirtschaftssubjekte durch eine Nutzenfunktion. Das bedeutet, dass der Marktpreis für das Wetterrisiko hier für die Preisbestimmung des Derivats nicht bekannt sein muss; er wird vielmehr endogen aus der Risikopräferenz der Investoren abgeleitet. Im Folgenden soll dieser Ansatz kurz skizziert werden. Betrachtet wird ein repräsentatives Wirtschaftssubjekt das den erwarteten Nutzen aus dem über künftige Perioden aggregierten Einkommen (bzw. den damit möglichen Konsum) maximieren möchte:

$$E \left[ \sum_{t=0}^{\infty} u(b_t, t) \right] \rightarrow \max \quad (14)$$

Darin ist  $u(b_t, t)$  eine konkave, vom (stochastischen) Einkommen  $b_t$  abhängige Nutzenfunktion in Periode  $t$ . Aus den Optimalitätsbedingungen (Euler-Gleichungen) für das dynamische Optimierungsproblem (14) lässt sich der Preis eines Derivates  $F$  mit einer Auszahlung  $D_\tau$  zum Zeitpunkt  $\tau$  durch folgende Gleichung bestimmen (vgl. CAO und WEI 1999: 6):

$$F_0 = E \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial b_\tau} / \frac{\partial u}{\partial b_0} \right) D_\tau \right] \quad (15)$$

(15) hat insofern Ähnlichkeit mit (5) und (9) als der Wert eines Derivats als Erwartungswert seiner Rückflüsse bestimmt wird. Die Spezifik im Vergleich zu den vorgenannten Methoden besteht darin, dass einerseits der Erwartungswert anhand der tatsächlichen (und nicht der risikoneutralen) Wahrscheinlichkeiten gebildet wird und andererseits anstelle des risikolosen Zinssatzes (9) ein stochastischer Diskontierungsfaktor

$(\partial u / \partial b_\tau) / (\partial u / \partial b_0)$  verwendet wird. Um (15) für die Bewertung von Wetterderivaten zu nutzen, ist die Annahme einer speziellen Nutzenfunktion notwendig. DAVIS (2001) zeigt einen engen Zusammenhang zwischen No-Arbitrage- und Gleichgewichtsmodellen auf. Unterstellt man eine logarithmische Risikonutzenfunktion für die Entscheider und einen GBP (7) für den Wetterindex, lässt sich (15) in ein Black-Scholes-Modell überführen, bei dem der risikolose Zinssatz  $r$  durch  $m - s^2$  ersetzt wird.

### 3.3 Modellierung und Schätzung des Wetterindex

Aus den vorgestellten Bewertungsformeln wird deutlich, dass die statistische Modellierung und Schätzung des betrachteten Wetterindex wesentlichen Einfluss auf die Bewertung von Wetterderivaten haben, da sie den Erwartungswert und die Streuung des Wetterindex zum Fälligkeitszeitpunkt determinieren. Hierbei ist zu unterscheiden zwischen Ansätzen, die unmittelbar die Verteilung des Wetterindex am Verfalltag betrachten und schätzen (z.B. BERG et al. 2005) und Modellen, die die zeitliche Entwicklung des Wetterindex oder der zugrunde liegenden Wettervariablen mit Hilfe eines stochastischen Prozesses abbilden. Diese Verfahren werden auch als „Index-Value-Simulation“ bzw. „Daily-Simulation“ bezeichnet. SCHIRM (2001) weist darauf hin, dass beide Methoden im Prinzip äquivalent sind, denn letztlich dient der stochastische Prozess auch dazu, die Verteilung der Rückflüsse des Wetterderivats zum Zeitpunkt  $\tau$  zu bestimmen; allerdings hängen die Parameter der Verteilung des Wetterindex zum Ausübungszeitpunkt von der Länge und der Jahreszeit der Akkumulationsperiode ab. Das bedeutet, dass im Rahmen der Index-Value-Simulation jede Bewertung unterschiedlicher Transaktionen eine separate Schätzung der Verteilung erfordert. Demgegenüber muss bei Anwendung der Daily-Simulation nur einmal ein stochastischer Prozess geschätzt werden. Ein weiteres Argument für die Durchführung einer Daily-Simulation ist der Umfang der Datenbasis und die damit einhergehende Schätzgenauigkeit (BRIX et al. 2002). Liegt beispielsweise eine 10jährige Datenreihe täglicher Durchschnittstemperaturen vor, so stehen 3 650 Beobachtungswerte zur Schätzung des stochastischen Prozesses der Tagestemperatur zur Verfügung, dagegen nur 10 zur Schätzung der Verteilung eines HDD oder CDD. Der Nachteil der Daily-Simulation besteht in ihrem hohen Aufwand zur Schätzung der teilweise komplizierten Prozesse. Nachstehend sollen beide Verfahren kurz erläutert werden.

#### a) Schätzung der Verteilung zum Verfallszeitpunkt

Es ist zu unterscheiden zwischen parametrischen und verteilungsfreien Verfahren. Parametrische Verfahren implizieren die Auswahl einer bestimmten Verteilungsform. Für viele Wettervariablen dürfte eine Normalverteilung plausibel sein, wenn die Kumulationsperiode ausreichend lang ist (Zentraler Grenzwertsatz). Für kurze Kumulationsperioden kommen auch andere Verteilungen in Frage. Beispielsweise schätzen BERG et al. (2005) eine Dreiecksverteilung für die Niederschlagssumme von Mai bis September. Weiterhin ist zu berücksichtigen,



dass bestimmte Indices keine negativen Werte annehmen können (z.B. CDD, HDD), was durch eine Log-Normalverteilung sichergestellt werden kann. Ein Beispiel für die Anwendung eines verteilungsfreien Verfahrens ist die sog. Burn-Rate-Methode. Sie basiert auf dem typischen versicherungsmathematischen Vorgehen, bei dem der aus historischen Daten berechnete Mittelwert der Auszahlungen für das Wetterderivat die Grundlage für die Bestimmung eines „fairen“ Preises bildet. Das Verfahren kann als eine spezielle Umsetzung der Bewertungsformel (5) verstanden werden. Der mittels Burn-Rate-Methode berechnete Preis beantwortet die Frage: „Was wäre zu zahlen gewesen, wenn man den Kontrakt in der Vergangenheit verkauft hätte?“. Die praktische Berechnung umfasst folgende Schritte:

- Auswahl einer geeigneten Zeitreihe historischer Wetterdaten
- ggf. Bereinigung der Daten
- Berechnung des Wetterindex
- Berechnung des hypothetischen Payoff für jede Periode
- Berechnung des durchschnittlichen Payoff
- Diskontierung auf den Bewertungszeitpunkt

Die Methode weist gewisse Ähnlichkeit mit der historischen Simulation auf, wie sie in der Value-at-Risk-Berechnung verwendet wird. Aufgrund ihrer Einfachheit wird diese Methode vielfach von Anbietern von Wetterderivaten verwendet. TURVEY (2001) sowie CAO et al. (2003) zeigen allerdings, dass die mittels Burn-Rate-Methode ermittelten Preise sehr ungenau sein können. Dies ist auf folgende Gründe zurückzuführen (vgl. NELKEN 2000):

- Die Länge der Datenreihe ist zu kurz, um die theoretische Verteilung gut zu approximieren.
- Die Wetterdaten können Trends aufweisen.
- Der ermittelte Preis des Wetterderivates ist unabhängig von der aktuellen Ausprägung der Wettervariablen zum Bewertungszeitpunkt.
- Es können keine neuen Informationen in die Bewertung einfließen, somit ist auch eine Fortschreibung des Wertes nicht möglich, was einen Handel während der Laufzeit des Wetterderivates erschwert.
- Es fehlt die Möglichkeit, die Risikoeinstellung der Marktteilnehmer konsistent zu berücksichtigen. Dies schlägt sich konkret in einer Ad-hoc-Annahme bezüglich des Diskontierungsfaktors für die Payoff des Derivats zum Verfallsdatum nieder.

Diese Kritikpunkte schließen jedoch nicht aus, dass die Burn-Rate-Methode in bestimmten Situationen eine praktikable Lösung darstellt.

#### b) Stochastische Prozesse

Bei der Spezifikation der stochastischen Prozesse für Wettervariablen sind im Vergleich zu Finanzderivaten einige Besonderheiten zu berücksichtigen. Der Verlauf der Variablen „Tagesdurchschnittstemperatur“ ist beispielsweise gekennzeichnet durch:

- Saisonabhängigkeit. Die Tagesdurchschnittstemperaturen folgen über die Jahre hinweg einem sinusförmigen Verlauf.
- Autokorrelation, d.h. einem überdurchschnittlich warmen Tag folgt wiederum ein warmer.
- Mean-Reversion, d.h. es besteht eine Tendenz zur Rückkehr zum langjährigen Temperaturmittelwert.
- Zeitveränderliche Varianz. Im Winter sind die Temperaturschwankungen größer als im Sommer

RICHARDS et al. (2004) untersuchen verschiedene Diffusions- und Jump-Prozesse und kombinieren diese mit ARCH-Modellen. Weitere Vorschläge für die Modellierung von Tagesdurchschnittstemperaturen finden sich bei CAMPBELL und DIEBOLD (2002).

In Bezug auf Niederschlag tritt das Problem auf, dass dieser lokal sehr große Unterschiede aufweist. Insofern scheint es erforderlich, auf mehrere Messstationen in einer Region zurückzugreifen. Zur Schätzung von Niederschlagsverteilungen unterscheidet MORENO (2002) zwischen der Niederschlagswahrscheinlichkeit und der Niederschlagsintensität. Die Niederschlagswahrscheinlichkeit wird durch eine Binomialverteilung mit zeitabhängigen Wahrscheinlichkeiten approximiert, um der beobachteten Autokorrelation beim zeitlichen Auftreten des Ereignisses „Regen“ Rechnung zu tragen.

Aus diesen Besonderheiten der Wettervariablen folgt allerdings nicht zwangsläufig, dass für den daraus abgeleiteten (und für die Bewertung letztlich relevanten) Wetterindex (z.B. HDD, CAT, Niederschlagssumme) nicht auch einfache stochastische Prozesse adäquat sein können. So zeigt z.B. DAVIS (2001) anhand empirischer Daten für Birmingham, dass der HDD sehr gut durch eine Log-Normalverteilung approximiert und für seine zeitliche Entwicklung folglich ein GBP (7) unterstellt werden kann.

#### **4 Vergleich der Bewertungsverfahren anhand numerischer Beispiele**

Die Ausführungen in Abschnitt 3 haben deutlich gemacht, dass eine Vielzahl von Methoden zur Bewertung von Wetterderivaten existiert, die sich in ihrer theoretischen Fundierung und ihrer Umsetzung unterscheiden. Unklar ist indessen, wie stark sich diese Unterschiede in praktischen Anwendungen bemerkbar machen. Ist die Diskussion um die Auswahl eines geeigneten Bewertungsverfahrens eine akademische oder hat sie praxisrelevante Auswirkungen? Um diese Frage zu beantworten, sollen einige der im vorangegangenen Abschnitt vorgestellten Verfahren vergleichend gegenübergestellt werden. Der Vergleich erfolgt im Rahmen

eines Beispiels mit realen Daten, wobei für die Auswahl des Beispiels vor allem die Datenverfügbarkeit und weniger die Breite des Einsatzbereichs ausschlaggebend war.

#### 4.1 Beschreibung des zu bewertenden Wetterderivats und der Datengrundlage

SCHMITZ und STARP (2004) folgend wird ein gartenbaulicher Betrieb betrachtet, der eine ganzjährige Unterglasproduktion von Zierpflanzen betreibt. Die Energiekosten, die eine wesentliche Kostenkomponente in der Gewächshausproduktion darstellen, sind in starkem Maße von der Außentemperatur abhängig. Mit einer Call-Option auf einen Temperaturindex könnte sich der Betrieb zumindest teilweise gegen die negativen Auswirkungen sehr niedriger Außentemperaturen in den Monaten November bis März absichern.<sup>5</sup> Die Kontraktsspezifikation für dieses Derivat, wie es an der CME in Chicago gehandelt wird, lautet folgendermaßen:

- Bezugsobjekt ist der HDD-Index.
- Die Kumulationsperiode erstreckt sich über den Zeitraum vom 01. November 2004 bis zum 31. März 2005 (5 Monate).
- Der Bewertungszeitpunkt sei der 01. Juli 2004, d.h. die Laufzeit der Option beträgt 9 Monate.
- Die Tick-Size beläuft sich auf 20 €.
- Der Strike-Preis entspricht 46 820 € (= 2 341 HDD x 20 €).<sup>6</sup>
- Der risikolose Zinssatz wird mit 5 % angenommen.

Darüber hinaus wird eine Call-Option auf einen CAT-Index bewertet. Die Auswahl dieses Index ist weniger durch sein Anwendungspotenzial in dem oben beschriebenen Gartenbaubetrieb motiviert, sondern durch den Wunsch, ein Derivat zu bewerten, bei dem die Prämissen für die Verwendung der analytischen Bewertungsverfahren nicht oder weniger gut erfüllt sind. Wie bereits erwähnt, setzen die auf der Black-Scholes-Bewertungsformel basierenden Verfahren eine Log-Normalverteilung für das Underlying voraus. Während diese Annahme für einen HDD- oder CDD-Index plausibel erscheint, ist für einen CAT-Index eher von einer Normalverteilung auszugehen. Die Call-Option auf den CAT-Index ist wie folgt spezifiziert:

- Bezugsobjekt ist der CAT-Index.
- Die Kumulationsperiode erstreckt sich über den Zeitraum vom 01. Mai 2005 bis zum 30. September 2005 (5 Monate).

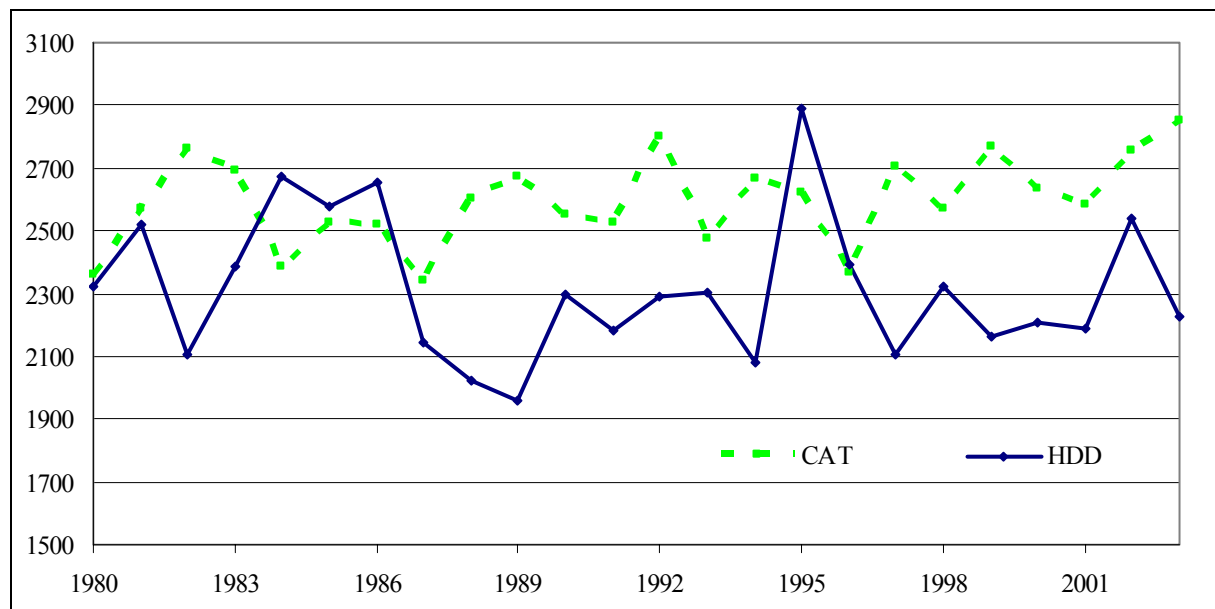
<sup>5</sup> Eine nähere Spezifikation des Betriebes und eine Untersuchung des Zusammenhangs zwischen der Temperatur und den Energiekosten ist in diesem Beitrag nicht erforderlich, da keine vollständige Wirkungsanalyse angestrebt wird und diese Informationen für die betrachteten Bewertungsverfahren nicht relevant sind. Der Bezug zu dem Gartenbaubetrieb dient vornehmlich der Motivation temperaturbezogener Wetterindices.

<sup>6</sup> Der Strike-Preis für ein Wetterderivat wird üblicherweise ausgehend vom empirischen Erwartungswert des Underlying definiert. Beispielsweise an der CME entspricht der Strike-Preis dem empirischen Erwartungswert oder dem empirischen Erwartungswert plus/minus einem bestimmten absoluten Wert. In diesem Beitrag wird ein Strike-Preis in Höhe des empirischen Erwartungswertes gewählt.

- Der Bewertungszeitpunkt sei der 01. Januar 2005, d.h. die Laufzeit der Option beträgt 9 Monate.
- Die Tick-Size beläuft sich auf 20 €.
- Der Strike-Preis entspricht 51 320 € (= 2 566 CAT x 20 €).
- Der risikolose Zinssatz wird auch hier mit 5 % angenommen.

Für die Berechnung des HDD- und des CAT-Index werden Temperaturdaten der Wetterstation Berlin-Tempelhof verwendet.<sup>7</sup> Dabei handelt es sich um durchschnittliche Tagesemperaturen über einen Zeitraum vom 01. Januar 1980 bis zum 30. Juni 2004. In Abbildung 2 sind der HDD-Index und der CAT-Index für Berlin-Tempelhof grafisch veranschaulicht.

**Abbildung 2: HDD und CAT für die Messstation Berlin-Tempelhof**



## 4.2 Schätzung der Verteilung der Temperatur und des Wetterindex

Im Folgenden wird ein Modell zur Abbildung der Tagesdurchschnittstemperaturentwicklung für die gewählte Messstation Berlin-Tempelhof geschätzt. Dieses Modell wird benötigt, um den Derivatpreis mit Hilfe der Daily-Simulation zu bestimmen. Die Modellierung von Temperaturdaten ist in der Literatur bereits ausführlich diskutiert worden. CAO und WEI (1999) und ALATON et. al (2002) schlagen folgendes Modell vor, das die oben angesprochenen Charakteristika des Verlaufs von Tagesdurchschnittstemperaturen berücksichtigt und das hier verwendet werden soll (vgl. auch SCHMITZ und STARP 2004):

<sup>7</sup> Der HDD und der CAT werden speziell für Berlin nicht an der CME gehandelt. Zur Implementierung der Bewertungsverfahren, die Futures- oder Optionspreisnotierungen benötigen, wird ersatzweise auf die Notierungen für London zurückgegriffen.

$$\begin{aligned}
T_t &= \bar{T}_t + U_t, \text{ mit} \\
t &= 1, 2, \dots, \\
\bar{T}_t &= a_1 + a_2 t + a_3 \sin(2\pi t/365 + \varphi), \\
U_t &= \sum_{i=1}^k \rho_{i-i} U_{t-i} + \sigma_t \xi_t, \quad \xi_t \sim i.i.d. N(0,1) \text{ und} \\
\sigma_t &= \sigma_0 - \sigma_1 |\sin(\pi t/365 + \phi)|
\end{aligned} \tag{16}$$

Gemäß (16) setzt sich die Tagesdurchschnittstemperatur  $T_t$  aus einem deterministischen Term  $\bar{T}_t$  und einem stochastischen Residuum  $U_t$  zusammen.  $\bar{T}_t$  berücksichtigt eine Saisonkomponente sowie einen langfristigen Temperaturtrend. Das trend- und saisonbereinigte Residuum  $U_t$  folgt einem autoregressiven Prozess mit einer zeitabhängigen Volatilität  $\sigma_t$ . Die Analyse der Autokorrelationsfunktion (ACF) und der partiellen Autokorrelationsfunktion (PACF) zeigt, dass ein AR(1)-Modell für  $U_t$  angemessen ist. Die mit SPSS ermittelten Parameter des Modells (7) sind in Tabelle 3 dargestellt. Der Parameter  $a_1$  gibt die Jahresdurchschnittstemperatur an,  $a_2$  misst den schwachen, aber signifikanten Temperaturanstieg der letzten 24 Jahre und  $a_3$  erfasst die Temperaturunterschiede zwischen Sommer und Winter.  $\sigma_0$  ist als durchschnittliche Standardabweichung der Temperatur zu verstehen und  $\sigma_1$  berücksichtigt die im Jahresverlauf unterschiedliche Volatilität.

**Tabelle 3: Parameterschätzwerte für das Temperaturmodell**

Parameter	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$\varphi$	$\rho_1$	$\sigma_0$	$\sigma_1$	$\phi$
Schätzwert	9.6984	0.00002	9.6732	-1.8731	0.7963	5.0405	2.0287	-0.1683
Standardfehler	0.0500	9.764e-6	0.0353	0.0036	0.0065	8.159e-6	3.228e-6	2.674e-6

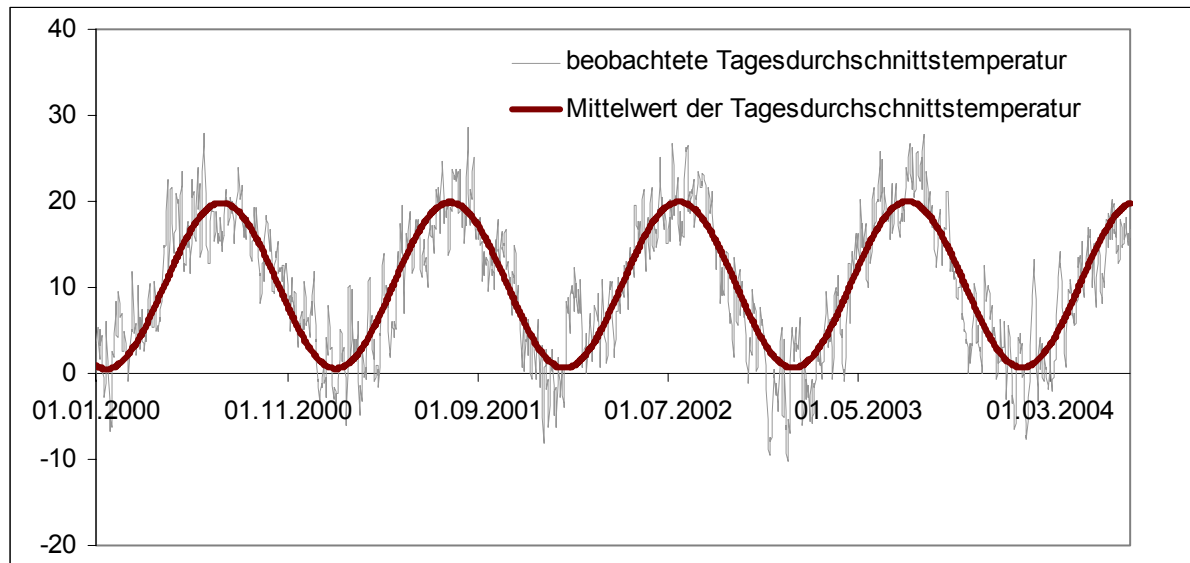
**Abbildung 3: Temperaturentwicklung für die Messstation Berlin-Tempelhof**

Abbildung 3 zeigt die aktuelle Tagesdurchschnittstemperatur  $T_t$  und den Mittelwert  $\bar{T}_t$  für einen Teil des Beobachtungszeitraums.

Im nächsten Schritt wurde mit Hilfe des MS-EXCEL-Add-In BEST-FIT getestet, welche Annahme bezüglich der Verteilung für die beiden Indices im Fälligkeitstermin zutreffend ist. Gemäß Chi-Quadrat-, Kolmogorov-Smirnov- und Anderson-Darling-Test kann die Log-Normalverteilung für den HDD-Index auf einem Signifikanzniveau von 5 % nicht abgelehnt werden. Allerdings weist die Extreme-Value-Verteilung eine geringfügig bessere Anpassung an die empirische Verteilung auf als die Log-Normalverteilung. Um die Unterschiede der Bewertungsverfahren besser analysieren zu können, wurde trotz dieses Befunds für alle Bewertungsverfahren (mit Ausnahme der Burn-Rate-Methode) eine Log-Normalverteilung und damit ein GBP für den HDD-Index unterstellt. Dadurch wird es möglich, Bewertungsunterschiede zu erkennen, die nicht auf die Verteilungsannahmen zurückzuführen sind. Die Driftrate  $m$  und die Standardabweichung  $s$  des GBP betragen 0.01 bzw. 13.03 %. Für die Bewertung des CAT wurde dagegen für die simulationsbasierten Bewertungsverfahren eine Normalverteilung bzw. ein arithmetisch Brownscher Prozess (ABP) zugrunde gelegt, denn die Log-Normalverteilung ist gemäß aller oben genannten Testverfahren mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % abzulehnen. Der ABP lautet:

$$dX = m dt + s dz \quad (17)$$

Die Drift und die Standardabweichung dieses Prozesses betragen 21.30 bzw. 194.29. Die Black-Scholes-Verfahren implizieren entgegen den statistischen Tests auch für den CAT-Index einen GBP, für den sich eine Driftrate von Null und eine Standardabweichung von 7.57 % ergibt.

### 4.3 Beschreibung des Versuchsaufbaus und der eingesetzten Bewertungsverfahren

Zur Bewertung der Call-Option auf den HDD- und den CAT-Index für Berlin werden folgende Methoden angewendet:

#### *Versicherungsmathematische Modelle*

##### 1. Die traditionelle Burn-Rate-Methode (s. Abschnitt 3.3)

Es stehen 24 Beobachtungswerte zur Verfügung. Die hypothetischen Rückflüsse der Option werden mit dem risikolosen Zinssatz diskontiert.

##### 2. Eine modifizierte Burn-Rate-Methode

Die Rückflüsse der Option werden nicht - wie bei der traditionellen Burn-Rate-Methode - unmittelbar auf der Grundlage der empirischen Beobachtungswerte für den jeweiligen Index berechnet. Stattdessen werden empirische Residuen in der Weise bestimmt, dass die Differenz zwischen den in der Vergangenheit beobachteten Realisationen des Index und dem Erwartungswert des geometrischen (für den HDD) bzw. des arithmetischen (für den CAT) Brownschen Prozesses berechnet werden. Diese empirischen Störterme werden zu dem Wert des Index im Bewertungszeitpunkt (unter Berücksichtigung des Zeitfaktors) addiert. Man könnte die modifizierte Burn-Rate-Methode somit als „stochastische Simulation mit empirischen Zufallszahlen“ bezeichnen. Das Verfahren, das in der Literatur in dieser Form noch nicht beschrieben und angewendet worden ist, kombiniert die Vorteile eines parametrischen Verfahrens mit der Einfachheit einer historischen Simulation. Zur Diskontierung kommt auch hierbei der risikolose Zinssatz zur Anwendung.

##### 3. Der faire Preis im versicherungsmathematischen Sinne (Formel 5)

Es wird der Erwartungswert einer am Strike-Preis der Option gestutzten Verteilung für den jeweiligen Temperaturindex bestimmt (Log-Normalverteilung für den HDD und Normalverteilung für den CAT). Grundlage bilden die tatsächlichen Verteilungen und nicht die risikoadjustierten Verteilungen. Für die Diskontierung der Differenz zwischen dem Erwartungswert der gestutzten Verteilung und dem Strike-Preis wird der risikolose Zinssatz verwendet.

#### *Kapitalmarkttheoretische Verfahren*

##### 4. Die Black-Scholes-Bewertungsformel (ohne Dividenden; Formel (10))

In die Berechnung fließt die Standardabweichung  $s$  des GBP (beim HDD-Index 13.03 % und beim CAT-Index 7.57 %) ein. Zur Diskontierung wird der risikolose Zinssatz  $r$  verwendet, der gleichzeitig die risikoneutrale Driftrate des Temperaturindex darstellt. Die Dividendenrendite  $q$  ist in diesem Fall Null.

##### 5. Die Black-Bewertungsformel für Optionen auf Futures (Formel (11))

Auch hier fließt die Standardabweichung des GBP für den jeweiligen Index ein, und es

wird mit dem risikolosen Zinssatz  $r$  diskontiert.<sup>8</sup> Im Gegensatz zur Black-Scholes-Bewertungsformel entspricht die Dividendenrendite  $q$  dem risikolosen Zinssatz, so dass sich eine risikoneutrale Driftrate von Null ergibt.

6. Die verallgemeinerte Black-Scholes-Bewertungsformel (12)

Der Marktpreis des Wetterrisikos wird implizit aus den Notierungen der Call-Option an der CME für den HDD-Index für London-Heathrow ermittelt. Dazu wird der Parameter  $\lambda$  in (12) solange variiert, bis sich die beobachteten Optionspreise einstellen. Dies ist bei einem Wert von 0.1214 der Fall.<sup>9</sup> Anschließend wird unterstellt, dass der auf diese Weise bestimmte Marktpreis des Wetterrisikos auch für die Bewertung einer Option für den HDD-Index für Berlin-Tempelhof herangezogen werden kann. Da für den CAT-Index keine Optionspreisnotierungen an der CME verfügbar sind, kann diese Vorgehensweise nur für den HDD-Index durchgeführt werden.

7. Das Gleichgewichtsmodell (14) mit der von Davis vorgeschlagenen Spezifikation

Dieses Modell führt wiederum zur Bewertungsformel (10), allerdings mit der risikoneutralen Driftrate -1.70 %.

### *Stochastische Simulation*

8. Stochastische Simulation für den Wetterindex zum Verfallszeitpunkt (Index-Value-Simulation; Formel (9))

Hierbei wird der HDD-Index bzw. Futures auf den HDD-Index 50 000 Mal mit der zeitdiskreten Version des GBP (7) ausgehend vom Beobachtungswert im Bewertungszeitpunkt bis zum Verfallszeitpunkt der Option simuliert. In jedem Simulationslauf wird der diskontierte Rückfluss der Option bestimmt. Der Mittelwert der Rückflüsse entspricht dem Optionspreis. Grundsätzlich könnten alle Varianten der Black-Scholes basierten Optionsbewertung (4. bis 7.) auch unter Anwendung der stochastischen Simulation berechnet werden. Hier wird dies aber nur am Beispiel einer Option auf einen Futures gezeigt, d.h. es werden bei der Simulation dieselben Parameterannahmen wie bei der Bewertungsvariante 5 zugrunde gelegt. Konkret fließen in die Simulation die (risikoneutrale) Driftrate in Höhe von 0, die Standardabweichung des Prozesses für den jeweiligen Temperaturindex sowie der risikolose Zinssatz ein. Bei der simulationsbasierten Bewertung einer Option auf den CAT-Index wird die zeitdiskrete Version des ABP (17) verwendet.

9. Stochastische Simulation basierend auf dem Temperaturmodell (Daily Simulation)

Die Dynamik der Tagesdurchschnittstemperatur wird ausgehend vom Beobachtungswert

<sup>8</sup> Obwohl in die Black-Bewertungsformel die Standardabweichung der Futuresnotierung einfließen müsste, haben wir auch hier die Standardabweichung des HDD-Index verwendet. Dafür gibt es zwei Gründe: Zum einen liegen Futurespreise nur über einen sehr kurzen Zeitraum vor. Zum anderen sollte die Standardabweichung des Futures- und HDD-Index ohnehin übereinstimmen (vgl. HULL 2000: 294).

<sup>9</sup> Zum Vergleich: ALATON et al. (2002) errechnen einen Marktpreis für Wetterrisiko in Höhe von  $\lambda = 0.08$ .



im Bewertungszeitpunkt (18.47 °C am 01. Juli, -0.17 °C am 01. Januar) gemäß Formel (16) über die Laufzeit der Option, d.h. über einen Zeitraum von 9 Monaten simuliert. Ausgehend von der simulierten Temperaturentwicklung wird der HDD- bzw. CAT-Index berechnet. Der Erwartungswert für den HDD-Index (CAT-Index) beträgt 2 341 (2 566). Bei der Implementierung dieser Methode stellt sich die Frage, wie das Prinzip der risikoneutralen Bewertung umgesetzt werden kann. SCHIRM (2001: 41) weist darauf hin, dass unklar ist, wie der stochastische Prozess der originären Temperaturvariablen zu modifizieren ist, der sich ja von dem stochastischen Prozess des Index unterscheidet ((16) versus (7)). Um dieses Problem zu umgehen, simulieren wir mit dem tatsächlichen (und nicht mit dem risikoneutralen) stochastischen Prozess, verwenden aber für die Diskontierung des Payoff der Option den risikoadjustierten Zinssatz  $(= r + \lambda \cdot s)$  anstelle des risikolosen Zinssatzes. Der risikoadjustierte Zinssatz beträgt 6.58 % (siehe 6.). Die Berechnung wird ebenfalls 50 000 Mal wiederholt und daraus der Mittelwert bestimmt.

Nach der Beschreibung der verschiedenen Bewertungsansätze ist zu klären, welche Methode als Referenzsystem für den Vergleich herangezogen werden kann und ob ein Vergleich überhaupt ohne weiteres möglich ist. Idealerweise würde man die „richtige“ Bewertungsmethode als Referenzsystem wählen, doch die Auswahl ist hier nicht eindeutig. Verfahren 1, 2 (Burn-Rate-Methode) und 3 („fairer Preis“) kommen kaum in Frage, da ihnen eine fundierte theoretische Grundlage fehlt. Für 4 (Black-Scholes) ist die Voraussetzung eines gehandelten Assets nicht gegeben. Ggesetzt den Fall, dass ein vollkommener Futuresmarkt existiert, liefert Variante 5 (das Black-Modell) eine korrekte Bewertung. Für die betrachteten Indices existieren Futuresmärkte, die gehandelten Umsätze sind aber recht gering. Verfahren 6 kommt ohne die Voraussetzung eines Futuresmarktes aus, allerdings birgt die Schätzung des Marktpreises für Risiko, wie sie hier vorgenommen wurde, Probleme und Ungenauigkeiten. Verfahren 7 (Davis-Modell) ist konzeptionell das allgemeinste, setzt jedoch eine spezielle Risikonutzenfunktion voraus. Den Verfahren 8 und 9 sind mit 5 und 6 vergleichbar. Ihnen haftet der „Makel“ der Simulation an, aber sie können beliebige Verteilungen nutzen. In Anbetracht dieser Merkmale, kann keines der Verfahren a priori als eindeutig überlegen angesehen werden. Das Augenmerk liegt daher auf der Beschreibung und Erklärung der Unterschiede zwischen den Verfahren und die Frage, inwieweit sich die Resultate gegenseitig stützen oder widersprechen.

#### 4.4 Beschreibung und Interpretation der Ergebnisse

Tabelle 4 zeigt die Preise der beiden Wetterderivate, die sich für die oben genannten Bewertungsverfahren und für unterschiedliche Werte für das Underlying zum Bewertungszeitpunkt ergeben. Der Begriff „Underlying“ hat in diesem Zusammenhang eine Doppelbedeutung: Zum einen ist damit der HDD- bzw. CAT-Index und zum anderen ein Futures auf den HDD- bzw. CAT-Index gemeint. Die Beobachtungswerte für das Underlying im Bewertungszeitpunkt wurden so gewählt, dass sie dem Erwartungswert des Temperaturmodells (16) entspre-

chen (mittlere Zeilen). Ausgehend von diesen Werten (2 341 bzw. 2 566) wurde jeweils ein Zuschlag und ein Abschlag in Höhe von 1 % vorgenommen. Diese Variation entspricht der Dynamik, wie sie für Futures mit entsprechender Laufzeit zu beobachten ist. Die Betrachtung verschiedener hypothetischer Beobachtungswerte für das Underlying zum Bewertungszeitpunkt erfolgt, um die Bedeutung des Startwertes bei Anwendung der verschiedenen Methoden aufzeigen zu können. Für die Daily Simulation (Spalte 9) ist diese Variation nicht möglich, da nicht der Beobachtungswert des HDD bzw. CAT, sondern die aktuelle Temperatur den Startwert der Simulation bildet.

**Tabelle 4: Werte für Call-Optionen auf den HDD- und den CAT-Index für Berlin-Tempelhof bei Anwendung verschiedener Bewertungsverfahren**

	Wert des Underlying zum Bewertungszeitpunkt	Spalte 1	Spalte 2	Spalte 3	Spalte 4	Spalte 5	Spalte 6	Spalte 7	Spalte 8	Spalte 9
		Versicherungsmathematische Modelle			Kapitalmarkttheoretische Verfahren				Stochastische Simulation	
		Burn-Rate-Methode		„Faire Prämie“ ( $r=5\%$ , $\mu=0\%$ )					Index-Value-Simulation ( $r=q=5\%$ )	Daily-Simulation
		konventionell	modifiziert							
<b>HDD-Index</b>	2 318	1 589	1 914	2 029	2 745	1 801	1 431	1 618	1 798	–
	2 341	1 589	2 146	2 029	3 042	2 029	1 626	1 833	2 021	1 987
	2 364	1 589	2 391	2 029	3 355	2 272	1 837	2 065	2 281	–
<b>CAT-Index</b>	2 540	1 483	1 295	1 292	2 112	1 054	n.a.	1 005	1 086	–
	2 566	1 483	1 534	1 292	2 472	1 293	n.a.	1 239	1 256	1 467
	2 592	1 483	1 787	1 292	2 857	1 561	n.a.	1 504	1 575	–

Zunächst fallen die hohen Unterschiede zwischen den Bewertungsverfahren auf. Im Extremfall unterscheiden sich die Ergebnisse um den Faktor 2. Spalte 1 bestätigt den konstruktionsbedingten Mangel der traditionellen Burn-Rate-Methode, dass der ausgewiesene Optionswert unabhängig vom Wert des Temperaturindex zum Bewertungszeitpunkt ist. Dies steht im Widerspruch zur Optionspreistheorie. Durch die vorgeschlagene Modifikation der Burn-Rate-Methode lässt sich dieser Mangel beheben. Für die Option auf den HDD-Index liegen die Werte der modifizierten Burn-Rate-Methode zwischen denjenigen, die mit der Black-Scholes-Formel (ohne Dividendenrendite) bzw. der Black-Formel berechnet wurden. Eine pauschale Wertung der konventionellen Burn-Rate-Methode ist anhand der durchgeführten exemplarischen Rechnungen nicht möglich. Während die ausgewiesenen Optionswerte für den HDD tendenziell zu niedrig erscheinen, trifft dies für den CAT nicht zu. Die Burn-Rate-Methode

und die Daily Simulation führen hier zu ähnlichen Ergebnissen. Die möglicherweise auftretenden Unterschiede zwischen der konventionellen Burn-Rate-Methode und den anderen Verfahren (mit Ausnahme der fairen Prämie) sind darauf zurückzuführen, dass im einen Fall die Beobachtungswerte für den HDD bzw. CAT als Realisation der Zufallsvariable „Temperaturindex im Fälligkeitszeitpunkt“ und im anderen Fall als Realisation eines stochastischen Prozesses interpretiert werden, für den Drift und Volatilität geschätzt werden. Beide Sichtweisen können, müssen aber nicht, zu unterschiedlichen Bewertungen kommen.

Die „faire Prämie“ (Spalte 3) ist ebenfalls nicht sensitiv gegenüber dem aktuellen Wert des Wetterindexes. Im Vergleich zu den anderen Verfahren kommt es teils zu einer Über- und teils zu einer Unterschätzung. Allerdings liefert die faire Prämie einen ähnlichen Preis, wenn die Drift Null ist und der Erwartungswert für die Verteilung des Index im Fälligkeitszeitpunkt mit dem Indexwert im Bewertungszeitpunkt zusammenfällt (mittlere Zeilen). Im vorliegenden Beispiel wurde der Diskontierungsfaktor so gewählt, dass sich dieselben Ergebnisse wie in der Black-Bewertungsformel ergeben. Dies ist aber nicht zwangsläufig der Fall.

Der Vergleich von Spalte 4 mit Spalte 5 und 6 zeigt, welcher Fehler entstünde, wenn man die Black-Scholes-Formel (ohne Dividendenrendite) ohne jegliche Korrektur auf die Bewertung von Wetterderivaten übertragen würde. Es käme zu einer Überschätzung des Wertes einer Call-Option, da eine implizierte Driftrate in Höhe des risikolosen Zinssatzes zu hoch ist. Es mag überraschen, dass die Ergebnisse der Black-Formel und der Black-Scholes-Formel mit Dividendenrendite (Spalte 5 und 6) deutlich voneinander abweichen. Technisch kann dies durch den relativ hohen Wert, der für den Marktpreis für das Wetterrisiko implizit ermittelt wurde, erklärt werden. Es ist aber zu betonen, dass die beiden Verfahren nicht unmittelbar vergleichbar sind. Zum einen beziehen sich, wie bereits erwähnt, der Wetterindex und der Marktpreis für das Wetterrisiko auf unterschiedliche Orte. Zum anderen hat die implizite Ermittlung von Parametern des Black-Scholes-Modells immer den Nachteil, dass Abweichungen zwischen dem theoretischen Preismodell und den realen Preisen in die implizit zu ermittelnden Parameter projiziert werden.<sup>10</sup> Die Preise des Gleichgewichtsmodells mit der von DAVIS vorgeschlagenen Spezifikation (Spalte 7) liegen zwischen denen des Black-Modells und des Black-Scholes-Modells mit Dividende. Diese Feststellung kann aber nicht verallgemeinert werden; die Preisrelation dieser drei Modelle ist durch das Verhältnis der drei Parameter  $r$ ,  $m$  und  $s$  determiniert.

Bei der stochastischen Simulation in Gestalt der Index-Value-Simulation (Spalte 8) wurden für den HDD-Index die gleichen Parameterannahmen getroffen wie in Spalte 5. Insofern überrascht es nicht, dass die Ergebnisse - abgesehen von geringfügigen Abweichungen infolge der Zufallszahlenziehung - übereinstimmen. Dieses Resultat bestätigt die vorliegenden positi-

---

<sup>10</sup> Dieses Problem ist im Zusammenhang mit der impliziten Schätzung von Volatilitäten unter dem Begriff „Volatility-Smile“ bekannt.

ven Erfahrungen zur Eignung von Simulationsverfahren zur Bewertung von Finanzderivaten (vgl. z.B. MÜBHOFF und HIRSCHAUER 2003). Die Daily-Simulation (Spalte 9) führt - wie zu erwarten - nicht zu denselben Optionswerten wie die Index-Value-Simulation. Ursächlich hierfür sind die unterschiedlichen statistischen Modelle, die der Temperaturdynamik zugrunde liegen. Schätzt man die Parameter der Log-Normalverteilung des HDD zum Fälligkeitszeitpunkt direkt aus den 24 empirischen Beobachtungswerten, so ergeben sich für den Erwartungswert und die Varianz andere Werte, als wenn diese mit simulierten Werten des Temperaturmodells (16) geschätzt werden. Aufgrund der Sensitivität des Optionswertes gegenüber diesen Parametern ergeben sich unterschiedliche Preise. Zudem stellt die Log-Normalverteilung ohnehin weder für die empirischen noch für die simulierten Daten die beste Annahme dar. Beim CAT kommt hinzu, dass die statistischen Tests eine Normalverteilung für diesen Index nahe legen. Folglich können die analytischen Bewertungsverfahren, die an eine Log-Normalverteilung gebunden sind, ohnehin keine Referenz für den „richtigen“ Optionspreis darstellen. Diese Befunde unterstreichen die Bedeutung einer präzisen statistischen Schätzung des Wetterindex.

## 5 Schlussfolgerungen

Die beispielhaft aufgezeigten Unterschiede der Bewertungsverfahren bestätigen die eingangs postulierte Relevanz der Bepreisung von Wetterderivaten sowohl für den Handel mit diesen Produkten als auch für deren einzelbetriebliche Wirkungsanalyse. Wenn potenzielle Marktteilnehmer mit unterschiedlichen Verfahren kalkulieren und zu ganz verschiedenen Ergebnissen kommen, ist eine mögliche Folge, dass kein eindeutiger Preis gefunden wird, den die Marktpartner als fair und angemessen betrachten. Dem Markt mangelt es dann an Liquidität, womit wiederum die Orientierung für andere potenzielle Marktteilnehmer fehlt.

Das Ausmaß der Unterschiede zwischen den Bewertungsverfahren wird unter anderem bestimmt durch:

- Die Unterschiede in der Anfangserwartung des Wetterindex für den Fälligkeitszeitpunkt  
Wie bereits herausgestellt wurde, unterscheiden sich die Verfahren in der Fähigkeit, differenzierte Erwartungen zu berücksichtigen. Inwieweit dies einen praktisch relevanten Mangel darstellt, hängt davon ab, wie stark die Erwartungswerte im Bewertungszeitpunkt differieren. Wenn beispielsweise im November eines Jahres stets dieselbe Erwartung für den HDD-Index Ende März vorherrscht, spielt es keine Rolle, ob die Bewertungsverfahren unterschiedliche Erwartungen erfassen können oder nicht.
- Die Laufzeit des Derivats  
Die Laufzeit hat einen zweifachen Einfluss auf die Unterschiede der Bewertungsverfahren. Einerseits können bei einer kurzen Laufzeit Wetterprognosen greifen, so dass der zuvor genannte Aspekt der Erwartungsbildung eine stärkere Rolle spielt. Andererseits schla-

gen bei einer längeren Laufzeit die Unterschiede in den bewertungsrelevanten Parametern „Driftrate“ und „Zinssatz“ stärker durch.

- Die Verteilung des Underlying

Je stärker die tatsächliche Verteilung des Wetterindex von einer Log-Normalverteilung abweicht, umso stärker werden die Unterschiede zwischen Verfahren, die diese Verteilung voraussetzen und solchen, die davon unabhängig sind.

Welche Schlussfolgerungen lassen sich aus den theoretischen Überlegungen und numerischen Rechnungen für die Auswahl eines geeigneten Bewertungsverfahrens ziehen? Zur Beantwortung der Frage, welcher grundlegende Ansatz zu wählen ist, erscheint die Unterscheidung zwischen börsengehandelten Wetterderivaten und OTC-Produkten sinnvoll. Welche der beiden Kategorien mittelfristig für das Agribusiness die größere Bedeutung haben wird, ist derzeit noch nicht klar abzusehen. Die bislang existierenden Kontrakte fallen in die letztgenannte Kategorie. Sie wurden speziell für die Bedürfnisse bestimmter Produzenten in abgegrenzten Regionen konstruiert und waren nach dem Erwerb nicht handelbar. Die Preise waren zum Teil staatlich subventioniert und fixiert. Das Problem der Etablierung solcher Kontrakte besteht in der erforderlichen Losgröße, um die Einführung aus Sicht eines Anbieters (z.B. einer Bank oder einer Versicherung) attraktiv zu machen. Für Deutschland ist fraglich, ob die Mindestmasse erreicht werden kann. Für diese OTC-Kontrakte erscheinen versicherungsmathematische Bewertungsverfahren geeigneter als kapitalmarkttheoretische. Wenn die Produkte nach Vertragsabschluss nicht handelbar sind, dann bringt der Informationszuwachs bezüglich des Underlying nichts, der bis zum Erfüllungszeitpunkt auftritt und der in die kapitalmarkttheoretischen Modelle einfließt und dort zu einer permanenten Neubewertung führt. Die Tatsache, dass unterschiedliche Erwartungen zum Zeitpunkt des Erwerbs des Derivats auch in versicherungsmathematische Modelle einfließen können, wurde am Beispiel der modifizierten Burn-Rate-Methode gezeigt. Kapitalmarkttheoretische Modelle zielen auf die Bewertung börsengehandelter Derivate ab. Speziell für Deutschland gibt es derzeit keine börsennotierten Derivate. Dies wird sich vermutlich in Zukunft ändern, doch es erscheint unwahrscheinlich, dass es eine umfangreiche Palette verschiedenster Bezugsobjekte geben wird. Daher werden die Landwirte diese Produkte kaum als Perfect-Hedge sondern „nur“ im Sinne eines Cross-Hedge einsetzen können. Angesichts der Vor- und Nachteile der beiden Marktformen bestehen auch für beide Grundtypen von Bewertungsmodellen sinnvolle Einsatzmöglichkeiten. Ob sie in analytischer Form oder simulationsbasiert zur Anwendung kommen, hängt dabei von der Komplexität der Anwendung ab. Unabhängig von der theoretischen Grundlage des Bewertungsansatzes verlangt die statistische Schätzung des Wetterindex besondere Aufmerksamkeit. Für temperaturbasierte Indices liegen Modelle vor, die in Gestalt einer Daily Simulation eine Alternative zur direkten Simulation der Verteilung des Temperaturindex zulassen; für niederschlagsbezogene Indices dagegen fehlen derartige Modelle zur Zeit. Hier besteht weiterer Forschungsbedarf.

## 6 Literatur

- ALATON, P., B. Djehiche and D. Stillberger (2002): On Modelling and Pricing Weather Derivatives. In: *Applied Mathematical Finance* 9 (1): 1-20.
- ASSELDONK, M. A.P.M. VAN and A.G.J.M. OUDE LANSINK (2003): Weather based Index Insurance to Hedge Temperature Exposure of Greenhouse Horticultural Farms. In: Wesseler, J., H.-P. Weikard and R.D. Weaver (eds.): *Risk and Uncertainty in Environmental and Natural Resource Economics*. Edward Elgar, Cheltenham: 235-249.
- BERG, E., B. SCHMITZ, M. STARP und H. TRENKEL (2005): Wetterderivate: Ein Instrument im Risikomanagement für die Landwirtschaft? In: *Agrarwirtschaft* 54 (2): 158-170.
- BLACK, F. (1976): The Pricing of Commodity Contracts. In: *Journal of Financial Economics* 3 (1-2): 167-179.
- BLACK, F. and M. SCHOLES (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities. In: *Journal of Political Economy* 81 (3): 637-659.
- BRIX, A., S. JEWSON and C. ZIEHMANN (2002): Weather Derivative Modelling and Valuation: A Statistical Perspective. In: Dischel, R.S. (ed): *Climate Risk and the Weather Market*. Risk Books, London: 127-150.
- CHAMBERS, R.G. and J. QUIGGIN (2004): Technological and Financial Approaches to Risk Management in Agriculture: An Integrated Approach. In: *The Australian Journal of Agricultural and Resource Economics* 48 (2): 199-223.
- CAMPBELL, S.D. and F.X. DIEBOLD (2002): Weather Forecasting for Weather Derivatives. Working Paper 02-42, Wharton Financial Institutions Center.
- CAO, M., A. LI and J. WEI (2003): A New Class of Financial Instruments. Working Paper, University of Toronto.
- CAO, M. and J. WEI (1999): Pricing Weather Derivative: An Equilibrium Approach. Working Paper, Queen's University Kingston, Ontario.
- CHEN, G., M.C. ROBERTS and T. CAMERON (2003): Managing Dairy Profit Risk Using Weather Derivatives. Working Paper, NCR-134. Conference on Applied Commodity Price Analysis, Forecasting and Market Risk Management, St. Louis, Missouri.
- COX, J.C., J.E. INGERSOLL and S.A. ROSS (1985): An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices. In: *Econometrica* 53 (2): 363-384.
- DAVIS, M. (2001): Pricing Weather Derivatives by Marginal Value. In: *Quantitative Finance* 1 (3): 305-308.
- DISCHEL, B. (2002): Dry Market in Need of Liquidity. In: *Risk Magazine for Investors* 15 (9): 20-22.
- EMBRECHTS, P. (2000): Actuarial versus Financial Pricing of Insurance. *Risk Finance* 1 (4): 17-26.
- HULL, J.C. (2000): *Options, Futures & Other Derivatives*. 4. Auflage. Prentice Hall International, Inc., New Jersey.
- LEISINGER, C. (2003): Die Hitze ist nicht mehr versicherbar. In: *Frankfurter Allgemeine Zeitung*, 29. August: 15.
- LUCAS, R.E. (1978): Asset Prices in an Exchange Economy. In: *Econometrica* 46 (6): 1429-1445.
- MCCARTHY, N. (2003): Demand for Rainfall-Index based Insurance: A Case Study from Morocco. EPTD Discussion Paper, No. 106. Environment and Production Technology Division, International Food Policy Research Institute, Washington, USA.

- MORENO, M. (2002): Rain Risk. Research Paper. Speedwell Weather Derivatives, London.
- MUBHOFF, O. und N. HIRSCHAUER (2003): Bewertung komplexer Optionen. PD-Verlag, Heidenau.
- NEFTCI, S.N. (1996): An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives. Academic Press, San Diego.
- NELKEN, I. (2000): Weather Derivatives - Pricing and Hedging. Super Computer Consulting Inc. Mundelein, Illinois. In: <http://www.supercc.com/papers/Weather.pdf>.
- RICHARDS, T.J., M.R. MANFREDO and D.R. SANDERS (2004): Pricing Weather Derivatives. In: American Journal of Agricultural Economics 86 (4): 1005-1017.
- SCHIRM, A. (2001): Wetterderivate; Einsatzmöglichkeiten und Bewertung. Working Paper. Graduiertenkolleg „Allokation auf Finanz- und Gütermärkten“, Universität Mannheim.
- SCHMITZ, B. und M. STARP (2004): Wetterderivate zur Absicherung des Energiekostenrisikos im Unterglasanbau. Vortragsmanuskript für die 44. GEWISOLA Jahrestagung, Berlin.
- STOPPA, A. and U. HESS (2003): Design and Use of Weather Derivatives in Agricultural Policies: the Case of Rainfall Index Insurance in Morocco. Working Paper. Intern. Conference: Agricultural policy reform and the WTO, Capri.
- TURVEY, C.G. (2001): Weather Derivatives for Specific Event Risks in Agriculture. In: Review of Agricultural Economics 23 (2): 333-351.
- (2002): Insuring Heat Related Risks in Agriculture with Degree-Day Weather Derivatives. Selected Paper. AAEA Annual Conference Long Beach, CA.

### *Danksagung*

Für hilfreiche Kommentare und Anregungen danken wir Gunnar Breustedt, Bernhard Schmitz, Michael Starp und zwei anonymen Gutachtern. Martin Odening dankt der Deutschen Forschungsgemeinschaft und Oliver Mußhoff der Klaus-Tschira-Stiftung, gemeinnützige GmbH, für finanzielle Unterstützung.

## **II. ANALYSIS OF RAINFALL DERIVATIVES USING DAILY PRECIPITATION MODELS: OPPORTUNITIES AND PITFALLS \***

by

Martin Odening<sup>1)</sup>, Oliver Mußhoff<sup>2)</sup> and Wei Xu<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Humboldt-Universität zu Berlin

Department of Agricultural Economics and Social Sciences

<sup>2)</sup>Georg-August-Universität Göttingen

Department of Agricultural Economics and Rural Development

---

\* Published in Agricultural Finance Review 67(1/2007): 135-156.



## Analysis of Rainfall Derivatives Using Daily Precipitation Models: Opportunities and Pitfalls

### **Abstract**

This study examines rainfall variability and its implications for wheat production risk in northeast Germany. The hedging effectiveness of rainfall options and the role of geographical basis risk are analyzed using a daily precipitation model. Simpler pricing methods such as the burn analysis and the index value simulation serve as benchmarks for comparison. It is found that the choice of statistical approach may lead to considerable differences in the estimation results. Daily precipitation models should be used with some caution in the context of derivative pricing because they tend to underestimate rainfall variability. This is unexpected, because daily simulation models are usually preferred in the context of temperature-based weather indexes.

### **Keywords**

Weather Derivatives; Precipitation Modeling; Hedging Effectiveness

### **JEL classification**

C8; Q14; Q54

## **1 Introduction**

Weather, though an important production factor in agriculture, can hardly be controlled. In fact, weather risks are a major source of uncertainty in crop production. Traditionally, producers have tried to compensate for the negative economic consequences of bad weather events by purchasing insurance. However, weather derivatives, a new class of financial instruments that permit the trade of weather-related risks, emerged in the mid-1990s. These instruments include futures, options, and swaps, all of which are traded over the counter and on formal exchanges such as the Chicago Mercantile Exchange (CME). Common underlying weather variables are temperature, rainfall or wind.

The advantage of Weather derivatives is that their payoffs are determined in a transparent manner and with low transaction costs. Moreover, they are not affected by moral hazard or adverse selection, which can be serious problems for insurance companies. Yet considerable risk may remain with the producer when using weather derivatives, because a) individual yield variations are not, in general, completely correlated with the relevant weather variable and b) geographical basis risk, i.e., the difference between the weather index at a reference point and at a specific farm location.

To date, it has not been clear if weather derivatives would permeate agriculture. But the literature increasingly deals with the question of whether weather derivatives can also play a role as agribusiness risk management tools (e.g. Turvey, 2001, 2005; Richards, Manfredo, and Sanders, 2004; van Asseldonk and Oude Lansink, 2003).

Analyzing the hedging effectiveness of weather derivatives requires three interrelated problem areas to be solved: Firstly, the statistical modeling of relevant weather variables; secondly, quantifying the relationship between weather variables and production; thirdly, developing a theoretically-consistent pricing model. This paper focuses on the availability of a reliable statistical model of the weather variable, which is important because it facilitates the quantification and prediction of the weather risk. Moreover, it is a necessary ingredient for calculating the price of the weather derivative, i.e., insurance costs. Substantial research exists with regard to the statistical modeling of temperature-related derivatives (e.g. Campbell and Diebold, 2005; Jewson and Brix, 2005), but only few papers deal with statistical models of rainfall derivatives, despite the importance of rainfall for agricultural production.

Obviously there are significant differences between analyzing rainfall and temperature. Rainfall is a binary event and evolves much more erratically than temperature changes. Moreover, the correlation between rainfall amounts at adjacent locations is relatively low. Most of the existing applications of rainfall insurance prefer to estimate the probability law of the rainfall index directly, assuming an appropriate distribution function (Stoppa and Hess, 2003; Skees et al., 2001). Turvey (1999) compares the results of an empirical and a normal distribution. Cao, Li, and Wei (2004) were the first to suggest calculating the derivative payoff from a rather subtle stochastic process of daily rainfall.

This paper has two objectives: The first is the development, estimation and comparison of different precipitation models. Comparing these models reveals their strengths and weaknesses and facilitates the assessment of their usefulness for analyzing rainfall-based weather derivatives or insurance in agriculture. In particular, we wish to investigate whether the use of daily simulation models can actually improve the pricing of rainfall derivatives, as is the case for temperature-related derivatives. The second objective is to study the role of basis risk for the hedging effectiveness of rainfall derivatives. Our focus lies on the quantification of geographical basis risk by means of a de-correlation analysis. The precipitation model and the de-correlation analysis are applied to a case study that considers wheat production in Germany.

The remainder of the paper is structured as follows: The next section briefly reviews the theoretical background of weather derivatives. Thereafter alternatives of index modeling are discussed. A daily precipitation model is then presented, followed by an empirical application. Using rainfall data from the Brandenburg region of Germany, put options on two rainfall indexes are priced with different methods and the effect of wheat producers' exposure to risk is examined. The paper ends with conclusions on the proposed statistical approach.

## 2 Valuation of Weather Derivatives

### 2.1 Pricing Weather Derivatives

Financial theory asserts that the price of a contingent claim,  $F$ , which depends on stochastic variable  $I$  and expires at time  $T$  can be calculated according to (Neftci, 1996: 297):

$$F = \tilde{E}[W(I)] \cdot \exp(-r \cdot T), \quad (1)$$

where  $W(I)$  denotes the payoff of the derivative at expiration and  $r$  is the risk-free interest rate. The variable  $E$  represents expectation, conditional on the information available at present, and the tilde ( $\sim$ ) indicates that the expectation of the derivative payoff is calculated by means of risk neutral probabilities instead of real world probabilities. The use of risk neutral probabilities ensures that the derivative price is arbitrage free. This is a desirable property when the derivative is traded before it expires.

To illustrate this concept, consider variable  $I$ , which follows a Geometric Brownian motion with an expected growth rate  $\alpha$  and volatility  $\sigma$ . To calculate the price of a derivative in a risk neutral world, the actual growth rate  $\alpha$  has to be reduced by a risk premium  $\lambda \cdot \sigma$  while volatility remains unchanged. The variable  $\lambda$  is known as the market price of risk for  $I$ . Hull (2006: 590) proves that if  $I$  is a traded asset, the market price of risk is given by  $\lambda = (\alpha - r) / \sigma$ . Inserting this in the above-mentioned expression for the risk premium shows that the risk adjusted discount rate is simply the risk free interest rate  $r$ . This fact is well-known from the Black-Scholes model.

However, the direct application of no-arbitrage models to weather derivatives is impractical since weather cannot be traded. If  $I$  is a weather index, it is not possible to construct a risk-free hedge portfolio consisting of  $I$  and the derivative  $F$ , and hence the price of the derivative must account for the market price of weather risk. Weather derivatives are typical examples of an incomplete market. Unfortunately, there is no unique way to “risk-neutralize” the objective (real world) probability distribution of the underlying  $I$  in the case of an incomplete market. Accordingly, many arbitrage-free prices for the derivative exist (Benth, 2004: 88).

Various proposals for treating this problem can be found in the literature. Alaton, Djehiche, and Stillberger (2002) determine the market price for weather risk to be an implicit parameter such that the theoretical pricing model matches the observable market prices for some contracts. Of course this approach is only practical if a market already exists for weather derivatives. Cao and Wei (2003) and Richards, Manfredo, and Sanders (2004) apply an extended version of Lucas’ (1978) equilibrium pricing model where direct estimation of weather risk’s market price is avoided. Instead, pricing is based on the stochastic processes of the weather

index and an aggregated dividend. Moreover, an assumption about the utility function of a representative investor is required.

Turvey (2005) refers to the capital asset pricing model in order to estimate the market price of risk. From the CAPM we have

$$\mu = r + (\mu_M - r) \cdot \rho \cdot \frac{\sigma}{\sigma_M}, \quad (2)$$

where  $\mu$  and  $\sigma$  are the expected value and the standard deviation of the returns of an asset, respectively. Variables  $\mu_M$  and  $\sigma_M$  denote the corresponding values of the market portfolio and  $\rho$  measures the correlation between the asset and the market portfolio. Combining (2) with the definition  $\lambda = (\mu - r) / \sigma$  provides an estimable relation for  $\lambda$ :

$$\lambda = \rho \cdot \frac{(\mu_M - r)}{\sigma_M}. \quad (3)$$

In the subsequent application, we will argue in accordance with Hull (2006: 552) that rainfall indexes have no (or a negligible) correlation with stock market returns, i.e., rainfall variability is not a systematic risk. In that case, the market price of risk is zero and no correction with the distribution of the weather index is necessary. This means the expectation in (1) can be calculated with real world probabilities.

## 2.2 Determining Hedging Effectiveness

Agricultural producers rarely evaluate a weather derivative via its contribution to a well-diversified investment portfolio. Rather, they are interested if and to what extent the existing yield risk can be eliminated by holding this security. The risk reduction that can be attributed to weather insurance is measured by comparing the revenue distribution of a production activity or a whole farm with and without having the weather derivative. The present value of revenues  $R$  of a farmer who produces output  $Q$  and holds a position of the weather derivative is defined by:

$$R = (Q(I) \cdot P + W(I)) \cdot \exp(-r \cdot T) - F. \quad (4)$$

Where  $P$  is the product price, which is assumed to be constant for the sake of simplicity. Without insurance the terms  $W$  and  $F$  vanish. Output  $Q$  is a function of the stochastic weather index  $I$  and other controllable or stochastic factors. Obviously, the risk-reducing potential of any weather insurance depends on the correlation between the weather index and the considered agricultural product. Further on, this relationship will be captured by the estimation of a ‘production function’.

Analyzing the hedging effectiveness of risk management tools is usually carried out in an expected utility framework. A widely-used utility function, which we also apply here, is the negative exponential

$$U(R) = -\exp(-\lambda_a \cdot R), \quad (5)$$

where  $\lambda_a$  is the absolute risk aversion parameter. The effect of weather insurance can then be expressed in terms of certainty equivalents  $CE$ :

$$CE = E^{-1}(U(R)). \quad (6)$$

### 3 Statistical Modeling of Weather Indexes

The previous section made clear that the probability distribution of the weather index  $I$  at the time of expiration is crucial to the assessment of any weather derivative. The distribution of the weather index influences the revenue distribution through the production function and the derivative payoff and also determines the cost of insurance, i.e., the derivative price. From a statistical viewpoint, there are three alternatives with regard to the modeling of weather risk. On the one hand, the weather index distribution (e.g. cumulative rainfall in May) can be estimated directly, either parametrically or non-parametrically. On the other hand, the relevant weather index can be derived from a daily model of a generic weather variable (e.g. daily rainfall) through appropriate aggregation.

The corresponding approaches are the burn analysis (also referred to as burn rate method), the index value simulation, and the daily simulation. These modeling approaches are briefly described in turn. We refer the reader to Jewson and Brix (2005, chapters 3, 4, and 6) for a more thorough discussion.

#### 3.1 Burn Analysis

In a non-parametric burn analysis, the general pricing formula (1) is implemented in a simple manner:

$$F = \exp(-r \cdot T) \cdot \left[ \frac{1}{n} \cdot \sum_{t=1}^n W(I_t) \right]. \quad (7)$$

Calculating (7) involves the following steps: First, weather data over a time horizon of  $n$  years are collected (and cleaned, if necessary). Next, the index value and the hypothetical payoffs of the derivative are determined for each year in the sample period. Finally, the payoff average is calculated and discounted with the risk-free interest rate  $r$ . This means that the burn analysis utilizes the empirical distribution of the rainfall index. No further statistical model is required.

Although this method is widely practiced, it has been criticized in the literature. Turvey (2005) states that a burn analysis is only backward-looking, and implicitly assumes that historical patterns will repeat themselves, while Cao, Li, and Wei (2003) report that derivative prices produced by this method are rather sensitive to the number of observations. Moreover, Jewson and Brix (2005) emphasize that the burn analysis has difficulties predicting the occurrence of extreme weather events.

### **3.2 Index Value Simulation**

An index value simulation follows steps similar to the burn analysis, but the empirical distribution is replaced by a statistical model for the weather index or the derivative payoff. This can be a non-parametric distribution, for example a kernel density, or a parametric distribution. The choice of the functional form of the distribution is usually based on theoretical considerations (e.g. a non-negative domain for rainfall amounts) and is supported by goodness-of-fit tests.

Parameters of the distribution can be estimated from historical data with standard methods such as the method of moments or maximum likelihood. With an appropriate distribution, at hand values for the precipitation index are randomly drawn and the discounted payoff of the derivative is determined. The derivative price is again obtained by calculating the average discounted payoff.

If the correct distribution is known and the parameters can be estimated precisely, then the index value simulation will produce more accurate results than the burn analysis, because random errors can be eliminated by choosing the number of random draws sufficiently high. However, in contrast to the modeling of financial variables, there is little theoretical guidance for modeling the distributions of weather indexes, and hence the danger exists of misspecifying the model.

### **3.3 Daily Simulation**

Instead of modeling the weather index or the payoff distribution directly, one can alternatively develop a statistical model for the stochastic process of the underlying weather variable (daily rainfall or average daily temperature). Such a model describes the dynamics of the weather variable over time and can be used for simulation. The weather index can be derived from the simulated sample path by summing up daily precipitation or daily average temperature, respectively, in the relevant accumulation period. The subsequent steps for calculating the derivative price are identical to the index value simulation.

This procedure is initially more complex, yet potentially favorable for several reasons: Firstly, the ways in which daily models can be used are very flexible, because practically all yield-relevant events such as the sums of precipitation or temperature for different accumulation

periods, dry spells or extreme precipitation can be determined for any time periods. In contrast, directly estimating the weather index distribution is usually only valid for a particular index. Secondly - and this seems even more important than the higher flexibility - the accuracy of daily-based models is higher due to a considerably larger number of observed values (Brix, Jewson, and Ziehmman, 2002). If observations from  $N$  years are available to estimate the parameters of a weather index distribution, then 365 times  $N$  observations can be used to estimate the stochastic process parameters of the underlying daily weather variable. Thirdly, daily simulation permits incorporating weather forecasts into the pricing model.

Presumably for these reasons, pricing and analyzing the effectiveness of temperature-related derivatives mainly originate from daily temperature models. Despite the aforementioned differences between the stochastic processes of temperature and rainfall, it seems promising to apply the daily modeling approach in the context of rainfall-based insurance. We pursue this idea in the next section.

#### 4 A Daily Precipitation Model

A precipitation model should be able to capture the following characteristics of daily rainfall: First, the probability of rainfall occurrence obeys a seasonal pattern. Rainfall in Europe, for example, is more likely in winter than in summer. Second, the sequence of wet and dry days follows an autoregressive process. This means that the probability of a rainy day is higher if the previous day was wet. Third, the amount of precipitation on a wet day varies with the season. Rainfall in Europe is more intensive in summer than in winter. Fourth, the volatility of the amount of rainfall also changes seasonally. In Europe, it is higher in summer than in winter.

In the following, a daily precipitation model is described which can depict these characteristics. According to Moreno (2002) and Cao, Li, and Wei (2004), the stochastic process of daily precipitation can be decomposed into two parts: First, a stochastic process for the binary event “rainfall” and “dryness”, and second, a distribution for the amount of precipitation given a rainy day. In order to specify the first component of the model, we define the random variable  $X_t$ :

$$X_t = \begin{cases} 0, & \text{if day } t \text{ is dry} \\ 1, & \text{if day } t \text{ is rainy} \end{cases} \quad (8)$$

It is assumed that  $X_t$  follows a first order Markov chain. The probability  $p_t$  that it will rain on day  $t$  can be calculated as:

$$p_t = p_{t-1} \cdot q_t^{11} + (1 - p_{t-1}) \cdot q_t^{01}, \quad t = 1, 2, \dots, 365, \quad (9)$$

where  $q_t^{01}$  describes the transitional probability of rain on day  $t$  and dryness on the previous day  $t-1$ . Analogously,  $q_t^{11}$  stands for the transition probability between two successive rainy days. Note that the transition probabilities  $q_t^{01}$  and  $q_t^{11}$  vary with time.

The second part of the model, i.e., the precipitation amount  $y_t$  on day  $t$ , is represented by a sequence of continuous random variables with independent distributions. In the literature, various distributions with a non-negative domain are discussed, among others being the exponential distribution and the gamma distribution (Woolhiser and Roldan 1982). The mixed exponential distribution has proven to be especially flexible (Wilks and Wilby 1999). The density function is given by:

$$f(y_t | X_t = 1) = \frac{\alpha_t}{\beta_t} \cdot \exp\left(-\frac{y_t}{\beta_t}\right) + \frac{1-\alpha_t}{\gamma_t} \cdot \exp\left(-\frac{y_t}{\gamma_t}\right), \quad (10)$$

with  $0 \leq \alpha_t \leq 1$  and  $0 < \beta_t < \gamma_t$ .

The mixed exponential is a weighted combination of two simple exponential distributions and inherits their properties. The advantage of this distribution is that it can better represent extreme events compared with a simple exponential (cf. Hansen and Mavromatis 2001). The parameters of the mixed exponential distribution  $\alpha_t$ ,  $\beta_t$  and  $\gamma_t$  are also time-varying. Thereby taking into account the seasonality of precipitation.

In this form, however, the model is not estimable. In order to reduce the number of the parameters to be estimated, each of the time-varying parameters is developed by a finite Fourier series:

$$\theta_{ij} = a_{j0} + \sum_{k=1}^{m_j} \left[ a_{jk} \cdot \sin\left(\frac{t \cdot k}{\tau} + b_{jk}\right) \right], \quad (11)$$

where  $\theta_{i1} = q_t^{01}$ ,  $\theta_{i2} = q_t^{11}$ ,  $\theta_{i3} = \alpha_t$ ,  $\theta_{i4} = \beta_t$ ,  $\theta_{i5} = \gamma_t$  and  $\tau = 365/(2 \cdot \pi)$ ;  $a_{jk}$  and  $b_{jk}$  denote the Fourier coefficients, and  $m_j$  is the maximum number of harmonics needed to specify the seasonal cycles. The variable  $m_j$  can be determined by means of a model selection criterion, for example, the Akaike information criteria (AIC). The Fourier coefficients for  $q_t^{01}$  and  $q_t^{11}$  are estimated by maximizing the following log-likelihood functions (Woolhiser and Pegram, 1979):

$$\ln L_1 = \sum_{t=1}^{365} \left[ c_t^{00} \cdot \ln(1 - q_t^{01}) + c_t^{01} \cdot \ln(q_t^{01}) + c_t^{10} \cdot \ln(1 - q_t^{11}) + c_t^{11} \cdot \ln(q_t^{11}) \right], \quad (12)$$

where  $c_t^{ij}$  denotes the observed number of transitions from state  $i$  at day  $t-1$  to state  $j$  at day  $t$ .

In order to estimate the Fourier coefficients for  $\alpha_t$ ,  $\beta_t$  and  $\gamma_t$  we maximize the following log-likelihood-function (Woolhiser and Pegram 1979):



$$\ln L_2 = \sum_{t=1}^n \ln[f(y_t | X_t = 1)], \quad (13)$$

where  $n$  denotes the number of rainy days in the sample.

Based on this model, Wilks (1999) provides a computational procedure for the simulation of sample paths of daily rainfall. First, three independent uniform random variables  $u_{1,t}$ ,  $u_{2,t}$  and  $u_{3,t}$  are generated, with  $u_{1,t}$ ,  $u_{2,t}$ ,  $u_{3,t} \in [0,1]$ . The sequences of wet and dry days (8) can then be simulated by comparing the estimated probabilities of daily rainfall occurrence (9) and  $u_{1,t}$  as follows:

$$X_t = \begin{cases} 0, & \text{if } u_{1,t} > p_t \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases}. \quad (14)$$

For a rainy day ( $X_t = 1$ ) the rainfall amount  $y_t^{sim}$  can be simulated according to:

$$y_t^{sim} = \tilde{y} - \varpi_t \cdot \ln(u_{2,t}), \quad (15)$$

where  $\tilde{y}$  is the minimal rainfall amount for a day to be recorded as rainy ( $\tilde{y}$  equals 0.1 mm for weather stations in Germany). The parameter  $\varpi$  is chosen as:

$$\varpi_t = \begin{cases} \beta_t, & \text{if } u_{3,t} \leq \alpha_t \\ \gamma_t, & \text{otherwise} \end{cases}. \quad (16)$$

The sequence  $y_t^{sim}$ ,  $t = 1, 2, \dots, 365$ , facilitates determining one iteration of the considered rainfall index. The whole procedure is repeated 50,000 times.

## 5 Application: Valuation of Rainfall Options for Grain Producers in Northeast Germany

Grain production in northeast Germany, Brandenburg in particular, is highly affected by rainfall risk. During the relevant period of April to June over the last 20 years, average yearly rainfall in Brandenburg was between 64 mm and 258 mm of precipitation (with a mean of 151 mm) and the grain yields have fluctuated similarly. The correlation between rainfall and yields results from the sandy soil possessing little water-storing capacity, as well as the lack of irrigation. Currently there is no possibility of insuring against yield losses caused by low rainfall.

In view of the extreme crop failures in the drought years 2000 and 2003, during which time the government had to provide disaster relief in order to save farmers from becoming insolvent, there is a pronounced interest in introducing some kind of rainfall insurance. By purchasing a put option on some rainfall index, a grain producer is (partially) insured against revenue losses due to little precipitation in the growing season. Prior to the analysis of the hedging effectiveness of a particular instrument, we investigated the properties of the histori-

cal simulation, the index value simulation, and the daily simulation for a variety of rainfall indexes.

### 5.1 Definition of the Rainfall Indexes

Two different types of precipitation indexes are defined: a cumulative rainfall index and a deficit index. The cumulative index  $I^c$  is the sum of daily rainfall amount in a certain accumulation period:

$$I^c = \sum_{t=1}^x y_t, \quad (17)$$

where  $x$  denotes the length of the accumulation period. We call this index the “rainfall sum”. Existing empirical studies on rainfall insurance usually apply this kind of index. As an alternative we suggest a rainfall deficit index  $I^d$  defined as:

$$I^d = \sum_{\tau=1}^z \min \left( 0, \sum_{t=(\tau-1) \cdot s+1}^{\tau \cdot s} y_t - y^{\min} \right). \quad (18)$$

This index measures the shortfall of the rainfall sum in an  $s$ -days period relative to a reference level  $y^{\min}$ . This shortfall is cumulated over  $z$  periods. Hence, the construction principle is quite similar to that of degree-day-indexes, which are widely used for the specification of temperature derivatives<sup>1</sup>. The rainfall sum and the rainfall deficit are calculated for four accumulation periods: January 1-December 31, March 1-July 31, April 1-June 30, and June 1-June 30. The variable  $s$  is set to five days and  $y^{\min}$  equals the average five-day precipitation in the respective accumulation period.

### 5.2 Specification and Estimation of the Precipitation Models

Estimation of the rainfall index distributions is based on rainfall data measured in Berlin-Tempelhof from 1 January, 1948 to 31 December, 2005. This means  $N = 58$  observations are available for estimating the empirical and the parametric distribution of the two rainfall indexes, and  $n = 21,170$  observations for estimating the daily precipitation model. The most appropriate parametric distributions for the eight indexes are determined by means of three goodness-of-fit tests: the Chi-Square test, the Kolmogorov-Smirnov test, and the Anderson-Darling test<sup>2</sup>. That distribution which showed the smallest value of the respective test criterion

<sup>1</sup> This definition may appear unusual since the deficit index will take negative values. However, the definition is convenient for the present application because the relationship between the index and the production output are the same as for the rainfall sum.

<sup>2</sup> The calculations were carried out with BestFit. Detailed information on the properties and the assumptions of the involved goodness-of-fit tests can be found for example in D’Agostino and Stephens (1986) and Vose (2005: 240).

was selected. Only distributions with a non-negative domain for the rainfall sum and a non-positive domain for the rainfall deficit were considered.

Table 1 displays the estimation results. For rainfall deficit, the beta distribution, in most cases, offers the best approximation to the empirical distribution. An exception is the accumulation period from March until July, where the Weibull distribution is more appropriate. The choice of a parametric distribution for the rainfall sum is more complicated, initially because more functions come into play and secondly because the three statistical tests suggest different distributions for the same accumulation period. Considering this sensitivity, we did not select a single distribution for the index value simulation but ran two variants labeled “index value simulation I” (IVS I) and “index value simulation II” (IVS II) thereafter.

**Table 1: Probability Distribution Functions Selected by Different Goodness-of-fit Tests**

Goodness-of-Fit Test	Rainfall Sum				Rainfall Deficit			
	- Accumulation Period -				- Accumulation Period -			
	Jan.- Dec.	March- July	April- June	June	Jan.- Dec.	March- July	April- June	June
Chi-Square	Beta	Weibull	Beta	PearsonVI	Beta	Weibull	Beta	Beta
Test-Value	3.90	4.41	7.30	11.96	6.50	6.84	10.28	9.00
Critical Value <sup>a)</sup>				16.92				
Kolmogorov-Smirnov	Weibull	Weibull	Gamma	Lognormal	Beta	Weibull	Beta	Beta
Test-Value	0.08	0.07	0.07	0.08	0.05	0.06	0.12	0.07
Critical Value <sup>a)</sup>	0.87	0.87	1.36	1.36	1.36	0.87	1.36	1.36
Anderson-Darling	Weibull	Erlang	Gamma	Lognormal	Beta	Weibull	Beta	Beta
Test-Value	0.42	0.23	0.44	0.54	0.53	0.29	0.66	0.82
Critical Value <sup>*</sup>	0.76	2.49	2.49	2.49	2.49	0.76	2.49	2.49

\* Critical Values at a 95 % significance level.

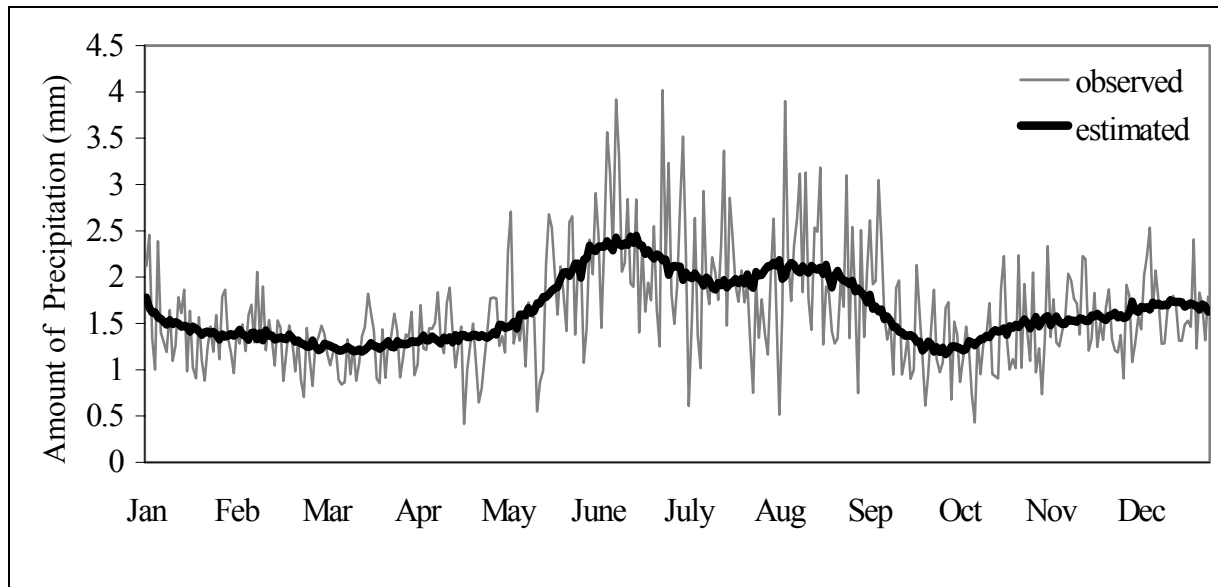
To estimate the daily precipitation model parameters (8) to (11), the likelihood functions (12) and (13) were maximized with a genetic algorithm<sup>3</sup>. The assumption of a mixed exponential distribution for the daily rainfall amount is supported by a Kolmogorov Smirnov test at a 95 % significance level. The number of harmonics of the Fourier series,  $m_j$ , are determined using the Akaike Information Criterion (AIC). The AIC value is minimal for  $m = 9$  in the case of the transition probabilities, and  $m = 7$  in the case of the mixed exponential distribution parameters. Figure 1 shows the actual and the estimated daily rainfall over the course of a year. Figure A1 in the appendix depicts the corresponding transition probabilities  $q_t^{01}$  and  $q_t^{11}$ . Obviously, the model not only fits the yearly average, but also the seasonality of the

<sup>3</sup> Genetic algorithms are heuristic search procedures which are able to solve complex optimization problems by mimicking the optimization strategy of biological evolution. For a detailed exposition, see Goldberg (1989) or Mitchell (1996).

rainfall amounts as well. From figure A2 it can be seen that the standard deviation of the estimated daily precipitation is actually higher in summer than in winter. Hence, the model reflects the aforementioned characteristics of daily rainfall.

A pitfall of the daily precipitation model is the underestimation of the cumulated rainfall variance over a period of several weeks. This underestimation of the variance has already been observed in a different context and has been termed “low frequency variability bias” (Hansen and Mavromatis, 2001; Dubrovsky, Buchtele, and Zalud, 2004). For example, the sample standard deviation of the cumulative precipitation from January until December is 95.09 mm, whereas the daily precipitation model only shows a value of 75.53 mm. One can expect that the daily simulation will also result in biased option prices because options prices are sensitive to volatility.

**Figure 1: Observed and Estimated Average Daily Precipitation (Weather Station Berlin-Tempelhof)**



Hansen and Mavromatis (2001) discuss various methods for reducing the low frequency variability bias. In this study we take several measures: First, the transition probabilities  $q_t^{01}$  and  $q_t^{11}$  are estimated by their empirical sample counterparts, which clearly show a higher variability than those based on the Fourier series (see figure A1). Moreover, the parameters of the mixed exponential distribution  $\alpha_t$ ,  $\beta_t$  and  $\gamma_t$  are determined in such a way that the resulting standard deviation exactly fit the sample standard deviation of the daily rainfall amounts shown in appendix Figure A2(b). Second, following Dubrovsky, Buchtele, and Zalud (2004), a second order Markov process, as opposed to a first order, is estimated. Thus, longer sequences of consecutive rainy and dry days, respectively, may occur, which leads to a higher standard deviation of the cumulated precipitation. In what follows, the original and the

modified daily precipitation model are called “daily simulation I” (DS I) and “daily simulation II” (DS II), respectively<sup>4</sup>.

### 5.3 Results of the Precipitation Models

Panel A of Table 2 presents the mean and the standard deviation of the rainfall index distributions obtained by applying the burn analysis, the index value simulation and the daily simulation<sup>5</sup>. The results of the parametric methods (index value simulation and daily simulation) are based on 50,000 repetitions. Consequently, sampling errors are virtually eliminated.

In order to assess the reliability of the five models, panel A also displays the estimates’ standard errors, which are calculated for 200 iterations using the bootstrap method.

In addition, the prices of a put and a call option on each of the eight rainfall indexes are calculated to illustrate the consequences of statistical modeling for the valuation of weather derivatives (table 2b). The option prices are calculated according to (1) using actual probabilities. The contract payoff  $W$  is  $\max(S - I, 0) \cdot V$  for the put option and  $\max(I - S, 0) \cdot V$  for the call option. The strike price  $S$  equals the sample mean of the respective indexes and the tick size  $V$  is set to 1 € per index point. A risk free discount rate of 5 % and a maturity of nine month are assumed.

---

<sup>4</sup> In addition to these two models, other model versions have been specified and estimated. For example, the mixed exponential distribution has been replaced by a kernel density estimator as suggested by Rajogopalan, Lall, and Tarboton (1996). The results, however, did not change significantly.

<sup>5</sup> Note that the mean and the variance do not completely describe the index distributions presented in Table 2. Higher order moments (e.g. skewness and kurtosis) may also differ. We focus here on the first two moments, since they are the most important determinants of the options prices considered below.

**Table 2: Comparison of Different Precipitation Models****PANEL A. Moments of the Rainfall Index**

Precipitation Model		Rainfall Sum Index				Rainfall Deficit Index			
		- Accumulation Period -				- Accumulation Period -			
		Jan. - Dec.	March - July	April - June	June	Jan. - Dec.	March - July	April - June	June
BA:									
▶	Mean	578.32 (11.94)	257.13 (7.31)	160.34 (6.43)	69.54 (5.23)	-257.99 (4.82)	-116.31 (2.35)	-75.88 (2.26)	-29.52 (1.59)
▶	Standard Deviation	95.09 (7.92)	53.46 (4.84)	51.37 (3.54)	40.21 (5.72)	37.48 (2.60)	18.79 (1.59)	17.13 (1.68)	13.04 (1.04)
IVS I:		Beta	Weibull	Beta	PearsonVI	Beta	Weibull	Beta	Beta
▶	Mean	578.32 (12.48)	254.27 (8.29)	160.34 (6.66)	75.54 (7.43)	-257.99 (5.26)	-116.31 (2.54)	-75.88 (2.28)	-29.52 (1.88)
▶	Standard Deviation	95.09 (6.30)	60.79 (5.70)	51.37 (3.37)	64.00 (16.36)	37.48 (2.32)	18.86 (1.74)	17.13 (1.37)	13.04 (1.04)
IVS II:		Weibull	Erlang	Gamma	Lognormal	Beta	Weibull	Beta	Beta
▶	Mean	572.86 (13.70)	256.69 (7.72)	160.34 (6.34)	70.57 (5.74)	see IVS I			
▶	Standard Deviation	105.73 (10.57)	53.44 (5.58)	51.99 (5.93)	45.66 (9.95)				
DS I:									
▶	Mean	578.72 (9.76)	257.10 (5.71)	161.54 (5.25)	68.13 (5.07)	-236.62 (3.79)	-108.27 (2.51)	-70.45 (1.69)	-28.16 (2.05)
▶	Standard Deviation	75.53 (5.87)	51.93 (4.74)	42.91 (4.92)	29.24 (3.68)	28.41 (2.37)	19.62 (1.75)	15.91 (2.06)	11.46 (1.22)
DS II:									
▶	Mean	579.21 (8.95)	256.31 (6.96)	160.91 (5.95)	69.15 (4.24)	-246.66 (3.12)	-113.89 (2.67)	-74.36 (1.99)	-30.09 (1.76)
▶	Standard Deviation	83.26 (6.94)	56.35 (5.00)	46.03 (4.90)	32.15 (4.13)	29.65 (2.42)	20.55 (1.89)	16.74 (1.69)	11.82 (1.11)

**PANEL B. Options Prices**

		Rainfall Sum Index				Rainfall Deficit Index			
		- Accumulation Period -				- Accumulation Period -			
Precipitation Model		Jan. - Dec.	March - July	April - June	June	Jan. - Dec.	March - July	April - June	June
BA:									
►	Put	37.04 (6.94)	20.56 (3.95)	20.15 (3.59)	13.82 (2.26)	14.95 (2.77)	7.10 (1.30)	6.31 (1.47)	5.16 (0.95)
►	Call	37.04 (7.12)	20.56 (4.54)	20.15 (3.87)	13.82 (4.13)	14.95 (2.79)	7.10 (1.45)	6.31 (1.09)	5.16 (0.87)
IVS I:		Beta	Weibull	Beta	PearsonVI	Beta	Weibull	Beta	Beta
►	Put	40.07 (6.94)	24.90 (5.14)	21.57 (3.78)	15.28 (2.17)	15.51 (3.09)	7.37 (1.44)	6.71 (1.37)	5.24 (1.00)
►	Call	37.93 (7.19)	22.14 (4.51)	20.81 (3.71)	21.06 (6.49)	15.89 (2.70)	7.37 (1.56)	7.03 (1.25)	5.18 (1.14)
IVS II:		Weibull	Erlang	Gamma	Lognormal	Beta	Weibull	Beta	Beta
►	Put	43.05 (9.05)	20.75 (4.01)	19.78 (3.43)	15.09 (2.14)	see IVS I			
►	Call	38.08 (7.25)	20.33 (4.89)	20.42 (4.20)	16.09 (4.61)				
DS I:									
►	Put	28.67 (4.40)	20.02 (3.24)	15.32 (2.98)	11.93 (2.09)	3.38 (0.82)	4.33 (1.15)	3.90 (1.20)	3.85 (1.16)
►	Call	29.06 (6.29)	19.99 (3.77)	16.47 (2.99)	10.57 (3.39)	25.03 (3.33)	12.08 (1.79)	9.13 (1.10)	5.16 (1.07)
DS II:									
►	Put	31.33 (4.85)	21.95 (3.72)	17.37 (3.50)	12.42 (2.25)	6.78 (1.35)	6.83 (1.47)	5.76 (1.28)	4.89 (1.09)
►	Call	32.19 (5.65)	21.16 (4.34)	17.92 (3.29)	12.04 (2.68)	17.70 (2.36)	9.16 (1.67)	7.22 (1.15)	4.34 (0.95)

Notes: BA = burn analysis, IVS = index value simulation, DS = daily simulation; mean and standard deviation in mm; values for the put and call option in €; values in parentheses are standard errors.

Using the empirical distribution generated by the burn analysis (BA) as a benchmark, we find from table 2a that the fit of the index value simulation and the daily simulation varies depending on the rainfall index. For example, the mean and the standard deviation of the rainfall deficit from April to June and the month of June are estimated fairly well by all methods. In contrast, high deviations occur, for example, in the sum of rainfall in June.

The relative performance of the index value simulation and the daily simulation is also ambiguous. The index value simulation is superior to both variants of the daily simulation for all variants of the deficit index in the sense that its estimates are closer to the mean and the standard deviation of the empirical distribution (which themselves are random variables). In contrast, the DS II outperforms the Pearson VI distribution in the case of the rainfall sum in June, and the Weibull distribution for the accumulation period March until July. As men-

tioned above, the DS I has particular problems in estimating the volatility of the rainfall index correctly. In almost all cases, the estimator is biased downwards. This problem can be mitigated by modifications of the standard model described above, but in some cases the DS II still underestimates rainfall variability, while the index value simulation tends to overestimate the volatility. This bias can be considerable e.g. for the rainfall sum in June.

The mean and standard deviation of the index distribution are important determinants of the corresponding options prices and hence, biased estimates of these parameters translate into incorrect derivative prices. The differences between the various estimation methods are pronounced for the annual period of rainfall deficit. Fair prices for the put option calculated with the daily simulation models amount to 3.38 € and 6.78 €, respectively, while the burn analysis and the index value simulation give an option price of about 15 €. It may also happen that estimation errors in the mean and in the volatility compensate each other, i.e., the resulting option price is right for the wrong reasons. This happens, for example, when IVS I is used to price a put option on the rainfall sum in June.

An argument that is sometimes presented in favor of daily simulation is that this method produces small standard errors. Actually, the daily simulation shows smaller standard errors than the burn analysis and the index value simulation in many cases of the present application, but the gain in accuracy is not as pronounced as reported by Brix, Jewson, and Ziehm (2002) for a temperature index. It may even happen that the daily simulation has slightly larger standard errors than one of the other estimation procedures. Interestingly, the estimates of the burn analysis frequently have smaller standard errors than those of the index value simulation. Contrary to this observation, the burn analysis has been criticized in the literature for producing unstable results (see, e.g. Cao and Wei, 2003; Zeng, 2000).

#### 5.4 Estimating the Relation between Wheat Yield and Rainfall

Estimation of the yield model is based on the yield data of a single representative farm in Brandenburg over 13 years, from 1993 to 2005. Thirteen observations seem to be a poor data base for the estimation of the yield model. However, a longer time series is not available for the new federal states in Germany in general and Brandenburg in particular, since production took place under totally different conditions prior to German reunification. Hence, yield data before and after 1990 cannot be pooled<sup>6</sup>.

Several functional forms for the yield model have been tested; in particular, a quadratic, a logarithmic, and a linear-limitational (Leontief) production function. The latter provided the

---

<sup>6</sup> This problem does not exist for regions in West Germany, but is not possible to link a yield model that is calibrated for a region in West Germany with a rainfall model for Brandenburg.



best fit in terms of  $R^2$  for the observed data and both indexes<sup>7</sup>. Another advantage of the Leontieff production function is that it duplicates the payoff structure of a (plain vanilla) option. That means if the yield can be modeled by a linear limitation function of the weather index, then an option on this index can be constructed which exactly offsets the revenues from production (if basis risk is non-existent). A linear-limitational production function is given by:

$$Q_t(I_t) = \begin{cases} d_0 + d_1 \cdot I_t + \varepsilon_t, & \text{if } I_t < d_2 \\ d_3 + \varepsilon_t, & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{with } t = 1, 2, \dots, 13. \quad (19)$$

Here,  $d_0$ ,  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  are parameters and  $\varepsilon_t$  is the error term of the production function. The variable  $I_t$  means, on one hand, the rainfall sum in June, and on the other hand the rainfall deficit in the period from April 1 until June 30 (with  $s = 5$  and  $y^{min} = 6.4$  mm).

Table 3 presents the estimated parameters of the production function. The associated test statistics show that the fit of the production function is much better for the rainfall deficit than for the rainfall sum. The magnitude of the production function estimation errors will affect the hedging effectiveness of the rainfall insurance, and therefore it is important to understand their occurrence. The rather low fit of the yield models can be partly attributed to the shortness of the yield time series. Moreover, the residuals of the regression include both production risk and geographical basis risk, since the considered farm site is located at a distance of about 40 kilometers from the weather station.

**Table 3: Estimation of Production Functions and Associated Test Statistics**

Index	Parameters	Estimation	$t$ -value	Critical Value of $t$ (95 %)	$R^2$	$F$ -value	Critical Value of $F$ (95 %)
Rainfall Sum	$d_0$	52.0	7.22	1.81	0.22	2.82	4.96
	$d_1$	0.19	1.83				
	$d_2$	130.0	—				
	$d_3$	77.0	3.48				
Rainfall Deficit	$d_0$	103.0	13.01	1.81	0.52	10.73	4.96
	$d_1$	0.81	4.97				
	$d_2$	-33.7	—				
	$d_3$	75.5	2.34				

## 5.5 Analysis of the Hedging Effectiveness of Two Rainfall Options

At this point, we have specified all model components necessary to investigate the hedging effectiveness as described in the latter part of section 2. We consider two put options: the first

<sup>7</sup> This finding cannot be generalized. Zhang (2003), for example, finds a quadratic production function more suitable for describing the relationship between wheat and rainfall. Vedenov and Barnett (2004) show that the appropriate weather-yield model varies by crop and region.

option refers to the rainfall sum in June, while the rainfall deficit in the period from April 1 until June 30 underlies the second option. These particular specifications were chosen because the correlations between the indexes and the wheat yield are then maximized. The strike levels for the two options are 130 mm and -33.7 mm, and the corresponding values for the tick size amount to 1.9 €/index point and 8.1 €/index point. Again, these parameters are determined in such a way that the hedging effectiveness of the two derivatives is maximized.

The stochastic values of the rainfall indexes are generated by means of the index value simulation (Lognormal distribution for the rainfall sum and Beta distribution for the rainfall deficit) and the modified daily simulation by using 50,000 repetitions. The basis risk that is inherent to the two options is captured by the normally distributed stochastic component of the estimated production functions. When simulating the stochastic revenues according to (4) a constant product price of 10 €/dt is assumed.

Table 4 presents selected parameters of the revenue distribution functions with and without rain insurance, as well as their certainty equivalents. The latter refer to the negative exponential utility function with an absolute risk aversion parameter  $\lambda_a = 0.01^8$ . Note that the expected value of the profit distributions does not change when buying the option, because the option price is calculated as the expected value of the payoffs with respect to the actual probabilities.

As explained earlier, this procedure implies a weather risk market price of zero and can be justified if the rainfall index and the market portfolio are uncorrelated. In the case of a positive correlation, the expected value of the weather index at expiration should be corrected downwards, thus yielding a higher price for the put options, i.e., the cost of insurance would be higher. Moreover, sellers (insurance companies, banks) will presumably charge additional premiums to cover their transaction costs. Hence, actual prices are expected to be higher than the prices displayed in table 4. This leads to a downward shift of the revenue distributions with insurance.

In contrast to other applications (e.g., Stoppa and Hess, 2003), risk-reduction using a put option on the rainfall sum is limited here due to high basis risk. The volatility of revenues with insurance is only about 15 % smaller than without insurance, and the certainty equivalent increases by 2 %. This is not surprising considering the small correlation between the rainfall sum and the wheat yield. The hedging effectiveness is higher for the rainfall deficit and amounts to one-third in terms of a reduction of the standard deviation; this finding emphasizes the importance of defining an appropriate weather index. As demonstrated below, the effect of rainfall insurance may be dampened or amplified the further or closer a farm is located in relation to the weather station.

---

<sup>8</sup> This choice of  $\lambda_a$  implies rather strong risk aversion (cf. Benitz et al. 2006).

From a methodical viewpoint, it is interesting to compare the two valuation methods. Table 4 shows that the revenue distributions of the index value simulation and the (modified) daily simulation do not differ significantly. Moreover, both approaches calculate nearly the same hedging effectiveness. The largest difference amounts to a 4 % variation for the certainty equivalent in the case of the deficit index. This is remarkable since table 2 showed considerable differences in the estimation of the mean and the standard deviation of the index distributions, in particular for the rainfall sum in June. The reason for this is that the index distributions of the rainfall sum generated by the index value simulation and the daily simulation differ mainly in the right tail, though these differences are aligned by the constant segment of the linear-limitational production function. However, this finding does not mean that the choice of modeling approach is unimportant. Other situations may exist where differences in the estimated rainfall distribution are translated more directly into the revenue distribution.

**Table 4: Hedging Effectiveness**

			Parameters of the Revenue Distribution				
Precipitation Model	Put Option	Option Price	Mean	Std. Dev.	5 %	95 %	Certainty Equivalent
Rainfall Sum Index:							
IVS	Without	117.21	624.13	117.89	434.39	821.79	548.06
	With		624.13	99.79	459.96	788.24	561.59
DS II	Without	113.29	626.62	114.06	437.94	815.66	552.56
	With		626.62	100.11	461.24	792.07	564.03
Rainfall Deficit Index:							
IVS	Without	107.11	619.76	119.36	411.00	803.47	523.83
	With		619.76	78.18	491.15	748.30	574.42
DS II	Without	103.73	624.02	115.82	424.61	805.73	546.55
	With		624.02	78.37	494.93	753.13	576.25

Notes: IVS = index value simulation, DS = daily simulation; all values are in €.

## 5.6 Analysis of Geographical Basis Risk

The existing empirical literature is equivocal with regard to the hedging effectiveness of weather derivatives in agriculture (see, e.g., Chen and Roberts, 2004; Edwards and Simmons, 2004; Fleege et al., 2004; Schmitz et al., 2004; Vedenov and Barnett, 2004; Manfredo and Richards, 2005). This is not surprising since the hedging effectiveness depends on several factors, which vary between applications: first, the correlation between the weather index and the yield is important. The correlation itself depends on the definition of the index and the considered product. Second, the quantification of the weather-yield relationship is subject to

estimation errors, which can be pronounced. Third, the geographical basis risk has to be taken into account.

The first two issues have been discussed: now we attempt to assess the magnitude of geographical basis risk that is inherent to the considered rainfall options by means of a de-correlation analysis. Rubel (1996) proposes the following nonlinear de-correlation function for the spatial relationship of precipitation in Europe:

$$\rho(d) = e_1 \cdot \exp(-e_2 \cdot d^{e_3}). \quad (20)$$

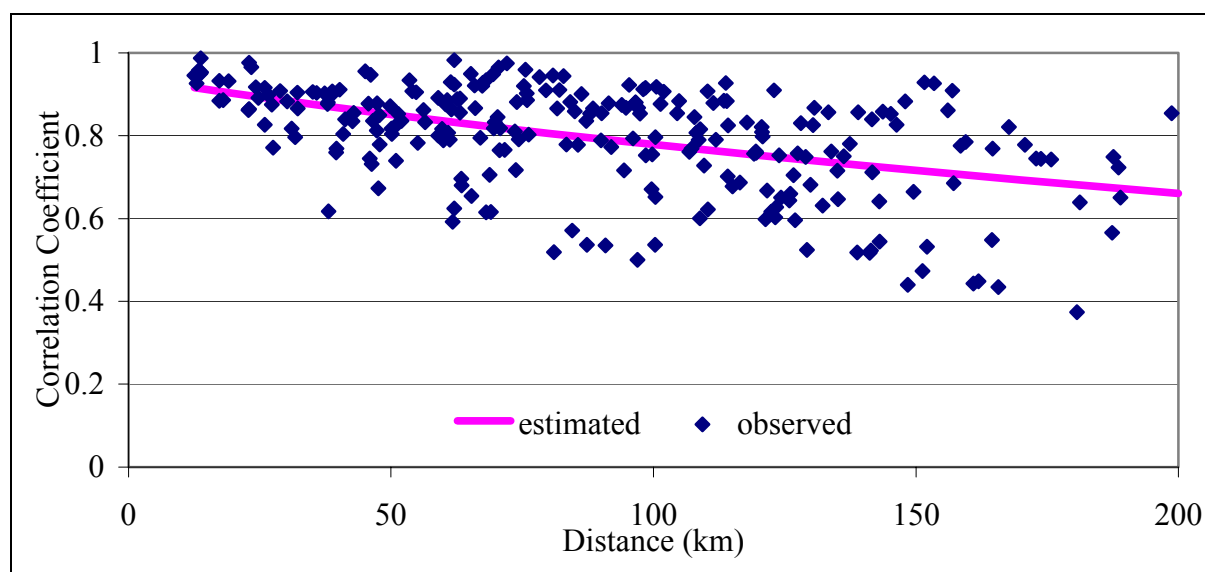
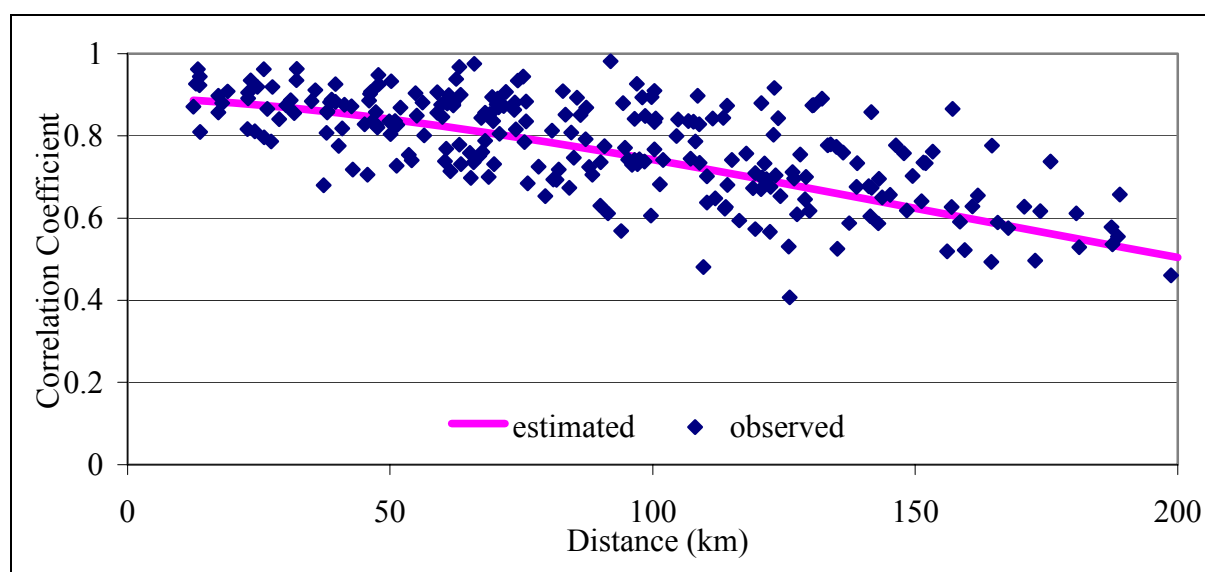
where  $\rho(d)$  denotes the correlation coefficient between precipitation at different places and  $d$  is the distance between the weather station and the farmer's production site. The variables  $e_1$ ,  $e_2$ , and  $e_3$  are parameters to be estimated. In spite of the de-correlation analysis being a popular instrument in meteorology, two points should be considered critically. Firstly, the de-correlation function is invariant regarding direction. Thus, topographical differences potentially influencing precipitation are neglected. Secondly, Embrechts, McNeil, and Straumann (1999) identify problems of using correlation coefficients when the underlying distributions are not elliptical. Despite these weaknesses, de-correlation analysis is used in this study.

Calculation of geographical basis risk is carried out for both considered rainfall indexes (i.e., rainfall sum in June and rainfall deficit from April-June 30). Rainfall records for 23 weather stations in the Berlin and Brandenburg region are available between January 1983 and December 2003. For each weather station, a time series of the two rainfall indexes is calculated, and pairwise correlation coefficients are determined. Next, the distances between the stations are measured and entered into the non-linear regression function (20). Parameter estimates for the de-correlation function are:  $e_1 = 0.94$ ,  $e_2 = 0.0033$  and  $e_3 = 0.88$  for the rainfall sum, as well as  $e_1 = 0.89$ ,  $e_2 = 0.0001$ ,  $e_3 = 1.63$  for the rainfall deficit.

Figure 2 shows the graphs of the de-correlation functions which, as expected, have a negative slope. The  $R^2$  for the rainfall sum is 0.24 and for the rainfall deficit 0.63. That is, the estimated de-correlation function is a better approximation to the empirical correlations in the case of the rainfall deficit. Moreover, the scatter plot reveals heteroscedasticity, i.e., the relationship between distance and correlation becomes less precise with increasing distance.

From figure 2 it can be seen that the correlation between Berlin-Tempelhof and a weather station 40 km away is approximately 0.87 for the rainfall sum and 0.86 for the rainfall deficit. These values decrease to about 0.65 and 0.5, respectively, at a distance of 200 km. This decrease is very moderate and related to the particular topographical situation in Brandenburg<sup>9</sup>.

<sup>9</sup> Salson and Garcia-Bartual (2003) report a correlation of only 0.3 at a distance of 10 km in a Mediterranean region. Paulson and Hart (2006) estimate a correlation coefficient of approximately 0.6 for one degree of latitude (110 km) in Iowa, USA. East (2005) finds a de-correlation similar to ours for southeast Australia.

**Figure 2: De-correlation Function for Precipitation in Brandenburg, Germany****a) Rainfall Sum****b) Rainfall Deficit**

Finally, we investigate the relationship between geographical basis risk and hedging effectiveness. This relationship is exemplified for the put option on the rainfall deficit index from April 1 until June 30 using the index value simulation. The setting of the calculation is as before, but a second farm, which is located in a distance of 140 km from the reference weather station instead of 40 km, is also considered. According to the estimated de-

correlation function, the correlation of the rainfall deficit index at these two farm locations is 0.74.

**Figure 3: Revenue Distributions with and without Hedging**

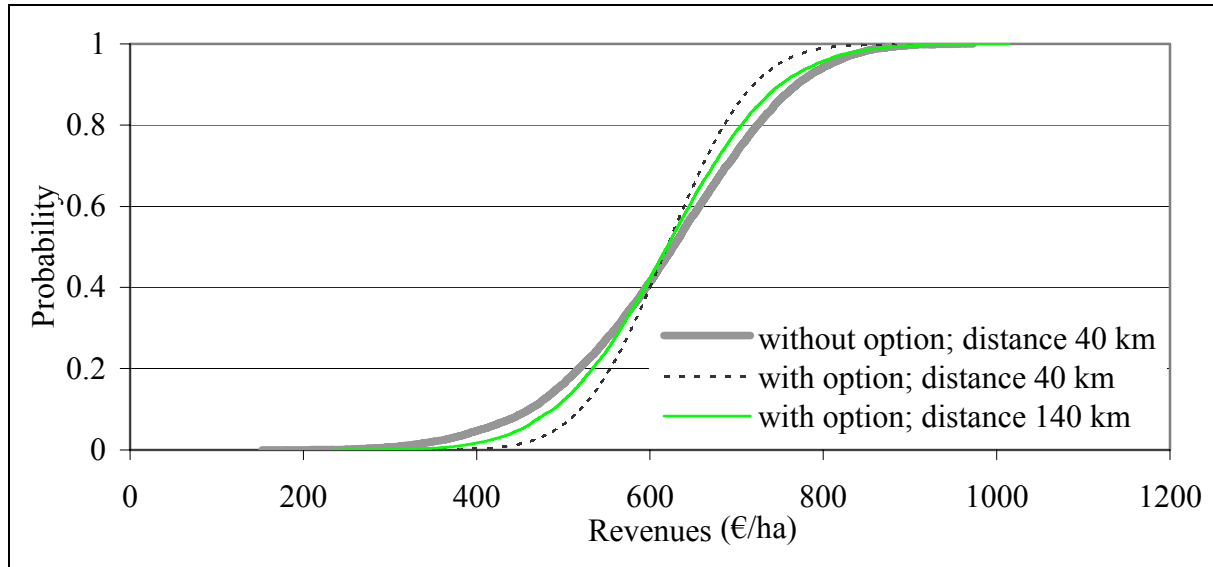


Figure 3 shows that the hedging effectiveness of a put option is considerably reduced the further away from the reference weather station the producer is located. The standard deviation of the revenues is 78.18 at a distance of 40 km and 103.38 at a distance of 140 km. That is, more than half of the risk-reducing potential of the put option vanishes if the distance between the farm location and the reference weather station increases by 100 km.

## 6 Conclusions

In this paper we investigate three statistical approaches that can be used for modeling rain risk and pricing rain insurance. Our main interest lies with the question of whether a daily precipitation model can improve the estimation of rainfall indexes (and thereby the valuation of an index-based insurance) using simpler approaches such as burn analysis and index value simulation for comparison. Our results indicate that clear differences in the estimation results may occur between the three approaches. This finding underscores the importance of the model choice. However, it is difficult to draw an unequivocal conclusion regarding the superiority of one of the valuation approaches. Insofar as our results do not confirm others' previous experience in the context of temperature modeling, daily simulation is generally preferred. On the one hand, applying daily simulation has the advantage of yielding smaller confidence intervals for the resulting indexes and prices compared with the non-parametric burn analysis and the index value simulation, though this advantage seems to be much smaller for rainfall than for temperature. On the other hand, the danger of a rather sophisticated daily precipitation model being

wrongly specified is relatively high; such a risk is precluded when the precipitation index is estimated directly.

In the present application, the daily simulation model tends to underestimate the volatility of monthly rainfall. This pitfall may be of minor importance in the context of meteorological or hydrological applications, but it is severe when the model is used for risk assessment and derivative pricing. Some measures to reduce this bias have been discussed and successfully implemented in this paper. Nevertheless, the problem deserves further attention.

Another shortcoming of the presented daily rainfall model is the ignorance of long-term (inter-annual) variability of the parameters. This means that trends, or an increase of rainfall volatility due to climatic changes are not captured by this model. In principle, however, it is also possible to incorporate interannual variability into daily precipitation models (cf. Wilks and Wilby, 1999). We conclude that the preferential statistical approach to weather derivative pricing depends on the context of its application. Ideally, more than one model should be implemented, and differences of the models' outcomes should be carefully analyzed. A systematic model validation based on quasi-ex ante forecasts is suggested as a subject of further research.

Regardless of the issue of the appropriate statistical method, the following practical conclusions can be drawn: The risk-reducing effect of precipitation derivatives is much more regionally confined than is the case with temperature related derivatives. In the example of Brandenburg considered here, the correlation between the precipitation index of the weather station Berlin-Tempelhof and a remote farm site decreases to a value of 0.75 at a distance of 100 km. If one additionally takes into account the stochastic relation between precipitation and production, the use of rainfall derivatives as risk management tools in agriculture appears questionable, at least for conditions comparable to those in this study.

It follows that potential suppliers of rainfall insurance should introduce a dense network of weather stations as reference points for the rainfall index in order to increase the attractiveness of this type of insurance, although this may lead to fragmented demand. Moreover, the specification of adequate weather indexes also requires further studies. Simple rainfall indexes, upon which we focus here, may not be specific enough from the viewpoint of many producers. The inclusion of additional weather variables in the weather index (e.g. temperature or humidity) could help mitigate the problem of basis risk.

## 7 References

- Alaton, P., B. Djehiche, and D. Stillberger. "On Modelling and Pricing Weather Derivatives." *Applied Mathematical Finance* 9,1(2002):1-20.
- Asseldonk, M. A. P. M. van, and A. G. J. M. Oude Lansink. "Weather Based Index Insurance to Hedge Temperature Exposure of Greenhouse Horticultural Farms." In *Risk and Uncertainty in Environmental and Natural Resource Economics*, eds., J. Wesseler, H. P. Weikard, and R. D. Weaver, 235-249. Cheltenham: Edward Elgar, 2003.
- Benitez, P. C., T. Kuosmanen, R. Olschewski, and G. C. van Kooten. "Conservation Pay-

- ments Under Risk: A Stochastic Dominance Approach.” *American Journal of Agricultural Economics* 88,1(2006):1-15.
- Benth, F.E. *Option Theory with Stochastic Analysis: An Introduction to Mathematical Finance*. Berlin: Springer, 2004.
- Brix, A., S. Jewson, and C. Ziehmann. “Weather Derivative Modelling and Valuation: A Statistical Perspective.” In *Climate Risk and the Weather Market*, ed., R. S. Dischel, 127-150. London: Risk Books, 2002.
- Cao, M., A. Li, and J. Wei. “Weather Derivatives: A New Class of Financial Instruments.” Working Paper, Schulich School of Business, York University, Canada, 2003.
- . “Precipitation Modeling and Contract Valuation: A Frontier in Weather Derivatives.” *The Journal of Alternative Investments*. (Fall 2004):93-99.
- Cao, M., and J. Wei. “Weather Derivatives Valuation and Market Price of Weather Risk.” Working Paper, Schulich School of Business, York University, Canada, 2003.
- Campbell, S. D., and F. X. Diebold. “Weather Forecasting for Weather Derivatives.” *Journal of The American Statistical Association* 100,469(2005):6-16.
- Chen, G., and M. C. Roberts. “Weather Derivatives in the Presence of Index and Geographical Basis Risk: Hedging Dairy Profit Risk.” Paper presented at the NCR-134 Conference on Applied Commodity Price Analysis, Forecasting, and Market Risk Management. St. Louis, Missouri, April 19-20, 2004.
- D’Agostino R. B., and M. A. Stephens, *Goodness-Of-Fit Techniques*. New York: Marcel Dekker, 1986.
- Dubrovsky, M., J. Buchtele, and Z. Zalud. “High-Frequency and Low-Frequency Variability in Stochastic Daily Weather Generator and its Effect on Agricultural and Hydrologic Modelling.” *Climatic Change* 63,1-2(2004):145-179.
- East, M. “Issues of Geographical Basis Risk in Weather Derivatives For Australian Wheat Farmers.” Contributed paper at the 49th Annual Conference of the Australian Agricultural & Resource Economics Society, Coffs Harbour, Australia, February, 2005.
- Edwards, M., and P. Simmons. “Preliminary Results For The Measurement of Willingness to Pay For Climate Derivatives.” Contributed paper at the 48th Annual Conference of the Australian Agricultural & Resource Economics Society, Melbourne, Australia, February, 2004.
- Embrechts, P., A. McNeil, and D. Straumann. “Correlation: Pitfalls and Alternatives.” Working Paper, Department Mathematik, ETH Zentrum, Zürich, Switzerland, 1999.
- Fleege, T. A., T. J. Richards, M. R. Manfredo, and D. R. Sanders. “The Performance of Weather Derivatives in Managing Risks of Specialty Crops.” Paper presented at the NCR-134 Conference on Applied Commodity Price Analysis, Forecasting, and Market Risk Management. St. Louis, Missouri, April 19-20, 2004.
- Goldberg D. E. *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Reading: Addison-Wesley, 1989.
- Hansen, J. W., and T. Mavromatis. “Correcting Low-frequency Variability Bias in Stochastic Weather Generators.” *Agricultural and Forest Meteorology* 109,4(2001):297-310.
- Hull, J. C. *Options, Futures & Other Derivatives*, 6th ed. New Jersey: Prentice Hall International, 2006.
- Jewson, S., and A. Brix. *Weather Derivative Valuation: The Meteorological, Statistical, Financial and Mathematical Foundations*. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- Lucas, R. E. “Asset Prices in an Exchange Economy.” *Econometrica* 46,6(1978):1429-1445.
- Manfredo, M. R., and T. J. Richards. “Hedging Yield with Weather Derivatives: A Role for

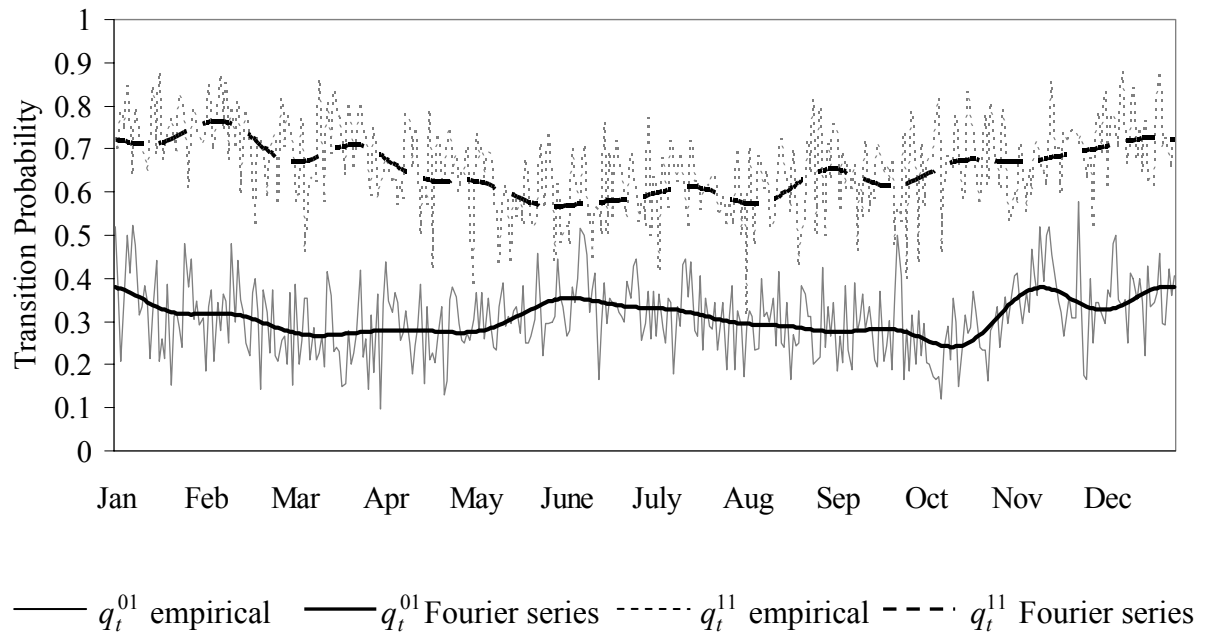


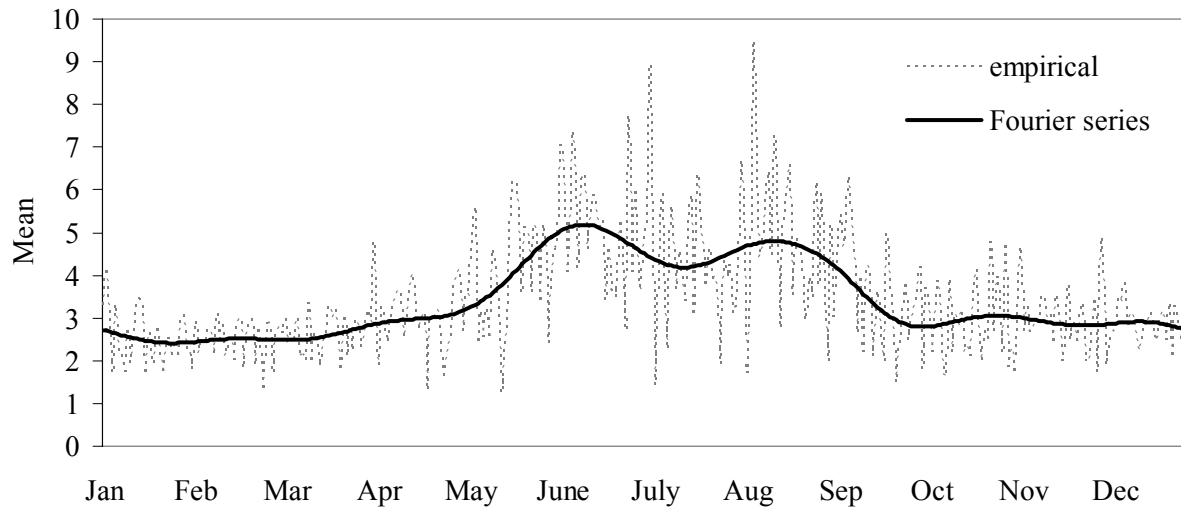
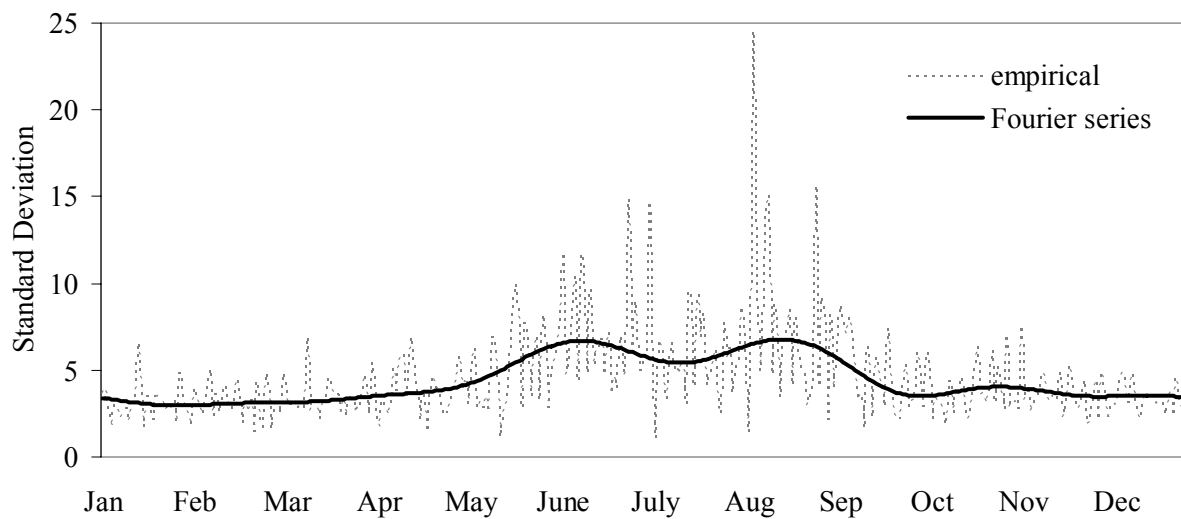
- Options.” Paper prepared for presentation at the American Agricultural Economics Association Annual Meeting, Providence, Rhode Island, July 24-27, 2005.
- Mitchell, M. *An Introduction to Genetic Algorithms*. Cambridge, MA: MIT-Press, 1996.
- Moreno, M. “Rain Risk.” Research Paper. Speedwell Weather Derivatives, London, 2002.
- Neftci, S. N. *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*. San Diego: Academic Press, 1996.
- Paulson, N. D., and C. E. Hart. “A Spatial Approach to Addressing Weather Derivative Basis Risk: A Drought Insurance Example.” Selected paper prepared for presentation at the American Agricultural Economics Association Annual Meeting, Long Beach, California, July 23-26, 2006.
- Rajagopalan, B., U. Lall, and D. G. Tarboton. “Nonhomogeneous Markov Model for Daily Precipitation.” *Journal of Hydrologic Engineering* 1,1(1996):33-40.
- Richards, T. J., M. R. Manfredi, and D. R. Sanders. “Pricing Weather Derivatives.” *American Journal of Agricultural Economics* 86,4(2004):1005-1017.
- Rubel, F. “Scale Dependent Statistical Precipitation Analysis.” In *Proceedings of the International Conference on Water Resource and Environment Research* 1(1996):317-324.
- Salson, S., and R. Garcia-Bartual. “A Space-time Rainfall Generator for Highly Convective Mediterranean Rainstorms.” *Natural hazards and Earth System Sciences* 3,1-2(2003): 103-114.
- Schmitz B., M. Starp, H. Trenkel, and E. Berg. “Weather Derivatives as a Risk Management Tool in Agriculture.” Paper presented at 86th EAAE Seminar on Farm Income Stabilisation: What Role should Public Policy Play? Capri, Italy, 21-22 October, 2004.
- Skees, J., S. Gober, P. Varangis, R. Lester, and V. Kalavakonda. “Developing Rainfall-Based Index Insurance in Morocco.” Policy Research Working Paper No. 2577, The World Bank, Washington D.C., 2001.
- Stoppa, A., and U. Hess. “Design and Use of Weather Derivatives in Agricultural Policies: The Case of Rainfall Index Insurance in Morocco”. Paper presented at the International Conference on Agricultural Policy Reform and the WTO: Where are we heading? Capri, Italy, June 23-26, 2003.
- Turvey, C. G. “The Essentials of Rainfall Derivatives and Insurance.” Working Paper WP99/06, Department of Agricultural Economics and Business, University of Guelph, Ontario, 1999.
- \_\_\_\_\_. “Weather Derivatives for Specific Event Risks in Agriculture.” *Review of Agricultural Economics* 23,2(2001):333-351.
- \_\_\_\_\_. “The Pricing of Degree-Day Weather Options.” *Agricultural Finance Review* 65,1(2005):59-85.
- Vedenov, D. V., and B. J. Barnett. “Efficiency of Weather Derivatives as Primary Crop Insurance Instruments.” *Journal of Agricultural and Resource Economics* 29,3(2004): 387-403.
- Vose, D. *Risk Analysis*, 2nd ed. New York: Wiley, 2005.
- Wilks, D. S. “Multisite Downscaling of Daily Precipitation with a Stochastic Weather Generator.” *Climate Research* 11,2(1999):125-136.
- Wilks, D. S., and R. L. Wilby. “The Weather Generation Game: A Review of Stochastic Weather Models.” *Progress in Physical Geography* 23,3(1999):329-357.
- Woolhiser, D. A., and G. S. Pegram. “Maximum Likelihood Estimation of Fourier Coefficients to Describe Seasonal Variations of Parameters in Stochastic Daily Precipitation Models.” *Journal of Applied Meteorology* 18,1(1979):34-42.

- Woolhiser, D. A., and J. Roldan. "Stochastic Daily Precipitation Models: 2. A Comparison of Distributions of Amounts." *Water Resources Research* 18,5(1982):1461-1468.
- Zeng, L. "Pricing Weather Derivatives." *Journal of Risk Finance* 1,3(2000):72-78.
- Zhang, H. "Improving Water Productivity through Deficit Irrigation: Examples from Syria, The North China Plain and Oregon, USA." In *Water Productivity in Agriculture: Limits and Opportunities for Improvement*, eds., W. R. Kijne, Barker and D. Molden, 301-309. Wallingford, UK and Cambridge, MA: CABI Publishing, 2003.

## 8 Appendix

Figure A1: Conditional Transition Probabilities



**Figure A2: Conditional Mean and Standard Deviation of Daily Precipitation****a) Mean****b) Standard Deviation**

### **III. ZUR QUANTIFIZIERUNG DES BASISRISIKOS VON WETTERDERIVATEN \***

von

Oliver Mußhoff<sup>1)</sup>, Martin Odening<sup>2)</sup> and Wei Xu<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>Georg-August-Universität Göttingen

Department of Agricultural Economics and Rural Development

<sup>2)</sup>Humboldt-Universität zu Berlin

Department of Agricultural Economics and Social Science

---

\* Published in: Kuhlmann, F.; Schmitz, M. (Hrsg.): Good Governance in der Agrar- und Ernährungswirtschaft. 46. Jahrestagung. Schriften der Gesellschaft für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften des Landbaues (GeWiSoLa), Landwirtschaftsverlag, Münster-Hiltrup: Landwirtschaftsverlag GmbH, Bd. 42(2007): 381-393 (in German).

## Zur Quantifizierung des Basisrisikos von Wetterderivaten

### Zusammenfassung

Es ist bekannt, dass das Wetter den Hauptunsicherheitsfaktor in der pflanzlichen Produktion darstellt. Seit einiger Zeit wird der Einsatz von Wetterderivaten zur Absicherung gegen wetterbedingte Ertragsschwankungen diskutiert. In diesem Beitrag wird am Beispiel eines getreideproduzierenden Betriebes in Brandenburg unter Verwendung von realen Ertrags- und Wetterdaten mit Hilfe eines Mit-Ohne-Vergleichs die risikomindernde Wirkung quantifiziert, die durch den Einsatz von Niederschlagsoptionen erzielt werden kann. Über eine geeignete Auswahl des der Option zugrunde liegenden Index, des Strike-Preises etc. kann die Hedging-Effektivität zum Teil direkt gesteuert werden. Das Basisrisiko der Produktion und das geografische Basisrisiko verbleiben jedoch in jedem Fall beim Landwirt. In diesem Beitrag wird die isolierte und kombinierte Wirkung des Basisrisikos der Produktion und des geografischen Basisrisikos explizit aufgezeigt. Dies erlaubt wichtige Rückschlüsse für die Gestaltung von Wetterderivaten. Somit ist die hier behandelte Fragestellung sowohl für Landwirte als auch für potenzielle Anbieter von Wetterderivaten relevant.

Keywords: Wetterderivate, Niederschlag, Hedging-Effektivität, Basisrisiko der Produktion, geografisches Basisrisiko

### 1 Einleitung

Die Getreideproduktion im Nordosten Deutschlands, speziell in Brandenburg, ist in hohem Maße vom Niederschlagsrisiko betroffen. In den Monaten April, Mai und Juni sind in Brandenburg (gemessen an der Wetterstation Berlin-Tempelhof) in den letzten 20 Jahren zwischen 63.6 und 257.9 mm Niederschlag gefallen (bei einem Mittelwert von 151.3 mm). Die Getreideerträge schwanken ähnlich stark, weil die sandigen Böden nur eine geringe Wasserspeicherkraft besitzen und Möglichkeiten zur künstlichen Beregnung fehlen. Angesichts der extremen Ernteausfälle in den Dürrejahre 2000 und 2003, in denen eine staatliche Katastrophenhilfe gewährt werden musste, um Betriebe vor der Illiquidität zu bewahren, ist der Wunsch nach einer Absicherung wetterbedingter Risiken bei den betroffenen Landwirten ausgeprägt. Zur Reduzierung wetterbedingter Risiken wurden in den letzten Jahren vor allem Ertragsausfallversicherungen diskutiert. Die Möglichkeit, sich gegen niederschlagsbedingte Ernteeinbußen zu versichern, besteht derzeit aber zumindest in Deutschland nicht.

Seit Mitte der 90er Jahre werden sog. „Wetterderivate“ als neues Instrument zur Steuerung des wetterbedingten Mengenrisikos diskutiert (vgl. SCHIRM, 2001; CAO et al., 2003; JEWSON et al., 2005). Wetterderivate führen in Abhängigkeit vom Wert für eine bestimmte objektiv messbare Wettervariable wie z.B. Temperatur, Niederschlag oder Windstärke zu einer mehr

oder weniger hohen Auszahlung. Sie dienen dem Austausch von Wetterrisiken und werden bislang vor allem von Energieunternehmen eingesetzt. In den USA und Kanada liegen aber auch schon Praxiserfahrungen für die Landwirtschaft vor (vgl. TURVEY, 2001; SKEES, 2001). Dabei werden vor allem Optionen genutzt. Grundsätzlich kann es sich bei Wetterderivaten aber auch um Futures, Swaps o.ä. handeln. Wetterderivate werden bislang überwiegend am Over-The-Counter (OTC)-Markt gehandelt. Das bedeutet, dass die Vertragsparteien die Kontraktsspezifikation bilateral festlegen müssen. Als Vertragspartner für einen Landwirt, der sich gegen zu niedrige Niederschlagsmengen in der Wachstumsphase pflanzlicher Produkte absichern möchte, kommt bspw. die Tourismusindustrie in Betracht, die mit Blick auf den Niederschlag eine entgegengesetzte Risikostruktur aufweist. Wetterderivate bieten aber auch für institutionelle Investoren wie Versicherungen oder Banken attraktive Möglichkeiten zu Diversifizierung eines Portfolios, da die mit dem Wetter verbundenen Risiken nur relativ schwach mit dem systematischen Risiko einer Volkswirtschaft korreliert sind.

Mit der Frage, inwieweit Wetterderivate ein brauchbares Risikomanagementinstrument im Agribusiness darstellen, beschäftigt sich eine wachsende Zahl von Veröffentlichungen. Der Fokus der bisherigen Arbeiten liegt zum einen auf theoretischen Fragen der Bepreisung von Wetterderivaten und zum anderen auf der Analyse temperaturbezogener Instrumente (vgl. VAN ASSELDONK, 2003; RICHARDS et al., 2004; MUBHOFF et al., 2005). Für landwirtschaftliche Anwendungen dürften allerdings niederschlagsbezogene Instrumente eine größere Bedeutung aufweisen. Speziell zur Wirkungsanalyse von Niederschlagsderivaten in der Landwirtschaft liegen aber bislang erst sehr wenige Veröffentlichungen vor (vgl. TURVEY, 2001; STOPPA und HESS, 2003; BERG et al., 2005). Bis heute ist daher nicht klar, ob sich Wetterderivate in der Landwirtschaft durchsetzen werden.

Das Ziel dieses Beitrages besteht darin, anhand eines Mit-Ohne-Vergleichs den risikomindernden Effekt des Einsatzes von Niederschlagsoptionen in der Getreideproduktion zu verdeutlichen. Besonderes Augenmerk wird dabei darauf gelegt, dass beim Einsatz von Wetterderivaten ein gewisses Restrisiko beim Produzenten verbleibt. Zum einen ist dies dadurch bedingt, dass individuelle Ertragsschwankungen im Allgemeinen nicht perfekt mit der dem Wetterderivat zugrunde liegenden Wettervariable korreliert sind (Basisrisiko der Produktion). Beispielsweise könnte sich das Wetterderivat auf die Gesamtniederschlagsmenge im Mai und im Juni beziehen, obgleich z.B. auch die Niederschläge in anderen Perioden, der zeitliche Anfall der Niederschläge und die Temperatur den Ertrag in der Pflanzenproduktion beeinflussen. Zum anderen besteht ein geografisches Basisrisiko. Damit ist in diesem Zusammenhang das nicht versicherbare Risiko gemeint, dass sich aus der Differenz des Wettergeschehens am Referenzpunkt des Derivats und dem Ort der landwirtschaftlichen Produktion ergibt. Während dieser Aspekt bei temperaturbezogenen Derivaten nicht so bedeutend ist, kann er aufgrund der hohen räumlichen Variabilität von Niederschlägen bei der Wirkungsanalyse von Niederschlagsderivaten nicht vernachlässigt werden. Eine Separation des Basisrisikos der Produktion und des geografischen Basisrisikos in Verbindung mit der Einschätzung der Hed-

ging-Effektivität von Wetterderivaten wurde in der Literatur bislang nicht behandelt, obwohl daraus wichtige Erkenntnisse für die Gestaltung von Wetterderivaten und deren Einsatzpotenzial in der Landwirtschaft abgeleitet werden können.

Der Beitrag ist wie folgt aufgebaut: In Abschnitt 2 wird die Datengrundlage und die methodische Vorgehensweise dargestellt. In Abschnitt 3 erfolgt die Wirkungsanalyse von Niederschlagsoptionen für einen exemplarischen Betrieb in Brandenburg. Der Beitrag endet mit Schlussfolgerungen für die Gestaltung von Wetterderivaten (Abschnitt 4).

## 2 Datengrundlage und methodische Vorgehensweise

Im Folgenden wird exemplarisch ein etwa 850 ha großer Marktfruchtbetrieb betrachtet, der in Brandenburg, genauer gesagt in Ketzin, wirtschaftet. Der Betriebsleiter möchte sich gegen Ertragsausfälle in der Weizenproduktion infolge zu geringer Niederschläge in den relevanten Wachstumsmonaten absichern. In Ermangelung einer Wetterstation und eines geeigneten Kontraktpartners wird der Landwirt kaum ein Derivat erwerben können, das sich direkt auf den Niederschlag „vor Ort“ bezieht. Es wird angenommen, dass allerdings im OTC-Handel Derivate verfügbar sind, die sich auf die Niederschlagsmessung an der für Berlin-Brandenburg zentral gelegenen Wetterstation Berlin-Tempelhof beziehen. Ketzin ist etwa 39 km westlich von Berlin-Tempelhof gelegen.

Die risikomindernde Wirkung, die durch den Einsatz von Wetterderivaten erzielbar ist, wird durch einen Vergleich der Erlösverteilung im Winterweizen ohne und mit Derivat quantifiziert. Im Fall ohne Derivat entspricht der auf den Zeitpunkt des Derivaterwerbs bezogene Erlös  $E_0^{ohne}$  (in €/ha) direkt dem diskontierten Weizenpreis multipliziert mit dem Weizenertrag (in dt/ha):

$$E_0^{ohne} = Q_T(I_T) \cdot P \cdot e^{-r \cdot T} \quad (1)$$

Der Weizenpreis  $P$  betrage 10 €/dt und ist durch einen Lieferkontrakt abgesichert. Der Weizenertrag  $Q_T$  ist eine Funktion von einer stochastischen Wettervariable  $I_T$  und anderen Produktionsfaktoren.  $r$  kennzeichnet den risikolosen Zinssatz und  $T$  die Laufzeit des Derivats. Im Fall mit Derivat ist der Erlös  $E_0^{mit}$  wie folgt zu berechnen:

$$E_0^{mit} = [Q_T(I_T) \cdot P + F_T(I_T)] \cdot e^{-r \cdot T} - F_0 \quad (2)$$

Erwirbt der Landwirt pro Hektar Weizenanbaufläche ein Derivat, kommt er nach der Zahlung des Anschaffungspreises  $F_0$  zusätzlich zum Erlös aus der Weizenproduktion in den Genuss des Rückflusses aus dem Derivat  $F_T$ , dessen Höhe von der Wettervariable abhängig ist.

Zur Einschätzung der Hedging-Effektivität von Wetterderivaten muss zunächst eine Produktionsfunktion geschätzt werden, in der der Wettereinfluss nicht - wie sonst üblich - Teil des Störterms ist, sondern ein nicht kontrollierbarer Produktionsfaktor (Punkt 2.1). Anschließend



werden zwei Derivate spezifiziert, die sich auf die Wettervariable in der Produktionsfunktion beziehen (Punkt 2.2). Bevor die Vorgehensweise zur Quantifizierung der Hedging-Effektivität von Wetterderivaten unter besonderer Berücksichtigung der unterschiedlichen Basisrisiken erläutert wird (Punkt 2.4), werden die Derivate bepreist (Punkt 2.3).

## 2.1 Zur Schätzung der Produktionsfunktion

Für den betrachteten Marktfruchtbetrieb liegen Ertragsdaten für Winterweizen über einen Zeitraum von 1993 bis 2005 vor<sup>1</sup>. Diese Weizenerträge werden in Abhängigkeit von zwei Niederschlagsindices erklärt, einem Kumulationsindex und einem Defizitindex. Der Kumulationsindex  $I_T^K$  entspricht der Niederschlagssumme innerhalb einer bestimmten Kumulationsperiode:

$$I_T^K = \sum_{t=1}^x y_t \quad (3)$$

Dabei kennzeichnet  $y_t$  den Niederschlag am Tag  $t$  und  $x$  die Länge der Kumulationsperiode. In bislang vorliegenden Veröffentlichungen zu Niederschlagsderivaten wird üblicherweise auf den Kumulationsindex zurückgegriffen (vgl. STOPPA und HESS, 2003; BERG et al., 2005). Als Alternative wird hier der Defizitindex  $I_T^D$  vorgeschlagen, in dem neben der Niederschlagsmenge innerhalb eines bestimmten Zeitraums auch der zeitliche Anfall des Niederschlags zum Ausdruck kommt:<sup>2</sup>

$$I_T^D = \sum_{l=1}^z \min \left( 0, \sum_{t=1}^s y_{t,l} - y^{min} \right) \quad (4)$$

Dieser Index misst die über  $z$  Perioden kumulierten Differenzen zwischen der Niederschlagssumme an  $s$  Tagen und einem Referenzniveau  $y^{min}$ .

Da für Ketzin keine Wetterdaten verfügbar sind, werden die beschriebenen Niederschlagsindices für die Jahre 1993 bis 2005 unter Rückgriff auf Daten der Messstation in Berlin-Tempelhof berechnet. Zur Spezifizierung des Zusammenhangs zwischen dem Kumulations- und Defizitindex in Berlin-Tempelhof  $I_t$  und dem Weizenertrag des Betriebes in Ketzin  $\tilde{Q}_t$  erscheint eine linear-limitationale Produktionsfunktion am geeignetsten:

<sup>1</sup> Um dem möglichen Einwand vorzubeugen, dass die Zeitreihe für statistische Auswertungen zu kurz ist, sei auf Folgendes hingewiesen: Ertragsdaten für Betriebe in den neuen Bundesländern aus der „Vorwendezeit“ und den ersten durch große strukturelle Anpassungen geprägten Jahren der „Nachwendezeit“ besitzen keine Aussagekraft für die Zukunft und können daher nicht für die Prognose verwendet werden. Gegen eine Verlagerung der Untersuchungsregion in die alten Bundesländer spricht, dass für den Abschluss eines Derivatgeschäfts eine bestimmte Betriebsgröße notwendig erscheint, die gerade von Betrieben in den neuen Bundesländern erreicht wird.

<sup>2</sup> In dieser Definition nimmt der Defizitindex negative Werte an. Dies ist zwar ungewöhnlich, in der vorliegenden Anwendung aber zweckmäßig, weil dann die Beziehung zwischen Ertrag und Defizitindex der zwischen Ertrag und Kumulationsindex ähnlich ist.

$$\tilde{Q}_t = \begin{cases} a_0 + a_1 \cdot I_t + \varepsilon_t, & \text{wenn } I_t < a_2 \\ a_3 + \varepsilon_t, & \text{andernfalls} \end{cases}, \text{ mit } t = 1, 2, \dots, 13 \quad (5)$$

Die Schlange macht deutlich, dass der Ertrag in Ketzin gemeint ist, während sich der Niederschlagsindex auf Wetterdaten in Berlin-Tempelhof bezieht ( $I_T$  statt  $\tilde{I}_T$ ).  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  beschreiben die zu schätzenden Parameter der Produktionsfunktion und  $\varepsilon_t$  den normalverteilten Störterm mit einer Standardabweichung von  $\sigma_\varepsilon$ . Offensichtlich sind bei Werten für den Niederschlagsindex unterhalb von  $a_2$  mm dürrebedingte Ertragsrückgänge zu erwarten. Bei Werten für den Niederschlagsindex oberhalb von  $a_2$  mm entspricht der erwartete Weizenertrag  $a_3$  dt/ha.

In der folgenden Tabelle 1 sind die (signifikanten) Parameterschätzwerte für die Produktionsfunktion dargestellt. Dabei wurde neben dem Index auch der Bezugszeitraum variiert. Die Parameter für den Defizitindex ( $s$ ,  $y^{min}$  und  $z$ ) wurden jeweils so gewählt, dass sich eine maximale Korrelation zwischen den Weizenerträgen und den Werten für den Niederschlagsindex ergibt. Mittels statistischer Tests ist für die Weizenerträge kein signifikanter Trend nachzuweisen. Das Bestimmtheitsmaß zwischen dem Weizenertrag und dem besten Defizitindex ( $R^2 = 0.52$ ) ist bedeutend höher als zwischen dem Weizenertrag und dem besten Kumulationsindex ( $R^2 = 0.22$ ).

**Tabelle 1: Parameterschätzwerte für die Produktionsfunktion**

Bezugszeitraum	Kumulationsindex			Defizitindex		
	Jan. – Juni	April – Juni	Juni	Jan. – Juni	April – Juni	Juni
$a_0$	0	0	52.0	104.5	103.0	85.7
$a_1$	0.27	0.59	0.19	0.24	0.81	2.11
$a_2$	242.0	109.9	130.0	-122.7	-33.7	-6.4
$a_3$	65.6	65.3	77.0	75.6	75.5	72.2
$\sigma_\varepsilon$	10.0	10.6	10.4	9.1	8.1	9.5
$R^2$	0.15	0.11	0.22	0.40	0.52	0.34

Im Folgenden wird die Spezifikation von Derivaten beschrieben, die sich auf den besten Kumulations- bzw. Defizitindex beziehen.

## 2.2 Zur Spezifikation der analysierten Wetterderivate

Bei den bislang vor allem in Nordamerika gehandelten Wetterderivaten und in der wissenschaftlichen Diskussion überwiegen Optionen. Die Auszahlung einer (europäischen) Put-Option entspricht:

$$F_T = \max(S - I_T, 0) \cdot V \quad (6)$$

Die Put-Option erbringt am Ende ihrer Laufzeit  $T$  eine Auszahlung, wenn der Niederschlagsindex  $I_T$  unterhalb des Strike-Preis  $S$  liegt. Überschreitet der Index den Strike-Preis, so ist die Auszahlung Null. Die Tick-Size  $V$  monetarisiert die positive Differenz zwischen  $S$  und  $I_T$ . Durch den Kauf einer Put-Option könnte sich der Landwirt also gegen Ertragsausfälle infolge zu geringer Niederschlagsmengen absichern.<sup>3</sup>

Es werden zwei Put-Optionen betrachtet: Die erste Put-Option, die der Landwirt im Oktober 2005 erwerben kann, bezieht sich auf die kumulierten Tagesniederschlagsmengen  $I_T^K$ , die im Juni 2006 an der Messstation Berlin-Tempelhof festgestellt werden. Die Laufzeit der Option  $T$  beträgt 9 Monate, der Strike-Preis  $S$  130.0 mm und die Tick-Size  $V$  1.9 €/Indexpunkt. Die zweite Put-Option, die der Landwirt ebenfalls im Oktober 2005 erwerben kann, bezieht sich auf die kumulierten Defizite  $I_T^D$  zwischen der an der Wetterstation Berlin-Tempelhof gemessenen 5-Tage-Niederschlagsmenge und 6.4 mm während des Zeitraums April bis Juni 2006 ( $z=19$ ). Der Strike-Preis  $S$  beträgt -33.7 mm und die Tick-Size  $V$  8.1 €/Indexpunkt.

Der Strike-Preis und die Tick-Size der Option wurden in der Weise optimiert, dass die Auszahlung der Option vollkommen spiegelbildlich zu den erwarteten Erlösen aus der Weizenproduktion erfolgt (perfekte negative Korrelation). Die Kontraktsspezifikationen für die hier betrachteten Niederschlagsoptionen sind in Tabelle 2 zusammengefasst.

**Tabelle 2: Spezifikation der betrachteten Niederschlagsoptionen**

	Option 1	Option 2
Optionstyp	Put	Put
Bezeichnung	Kumulationsindex	Defizitindex
Bezugspunkt	Niederschlagsdaten an der Wetterstation in Berlin-Tempelhof	Niederschlagsdaten an der Wetterstation in Berlin-Tempelhof
Bezugszeitraum	Juni	April – Juni
Berechnung	$I_T^K = \sum_{t=1}^{30} y_t$	$I_T^D = \sum_{l=1}^{19} \min\left(0, \sum_{t=1}^5 y_{t,l} - 6.4\right)$
Verteilung	Log-Normal	Beta
Strike-Preis $S$	130.0 mm	-33.7 mm
Tick-Size $V$	1.9 €/Indexpunkt	8.1 €/Indexpunkt
Laufzeit $T$	9 Monate	9 Monate
Auszahlung $F_T$	$\max(S - I_T^K, 0) \cdot V$	$\max(S - I_T^D, 0) \cdot V$
Zinssatz $r$	5 %	5 %

<sup>3</sup> Der Inhaber einer Call-Option hat das Recht, einen stochastischen Basiswert zu einem festgelegten Strike-Preis im Verfallszeitpunkt zu kaufen. Eine Call-Option könnte dazu beitragen, Qualitäts- und Wartekosten einer nichtterminierenden Ernte in Folge einer lang anhaltenden Regenperiode während der Erntezeit zu kompensieren.

### 2.3 Zur Bestimmung des Optionspreises

Will der Landwirt seine Erlöse in der Weizenproduktion durch den Einsatz einer Niederschlagsoption absichern, so muss er zunächst den Optionspreis aufwenden. Da die Optionen nicht öffentlich gehandelt werden, muss deren Preis zunächst bestimmt werden. Wenn man davon ausgeht, dass der erwartete Gewinn aus dem Optionsgeschäft für beide Parteien gerade Null ist und keine Transaktionskosten berücksichtigt werden, dann entspricht der Optionspreis dem mit dem risikolosen Zinssatz  $r$  diskontierten Erwartungswert des Rückflusses der Option („faire Prämie“):<sup>4</sup>

$$F_0 = E(F_T) \cdot e^{-r \cdot T} \quad (7)$$

Als Bewertungsverfahren kommen grundsätzlich analytische Verfahren, die historische Simulation (Burn-Analyse), die stochastische Simulation (Index-Value-Simulation) und die Daily-Simulation in Betracht. Analytische Verfahren erfordern restriktive Annahmen z.B. bzgl. der Verteilung für die Wettervariable. Die mittels historischer Simulation als nicht parametrisches Verfahren bestimmten Optionspreise können sehr ungenau sein, weil bspw. die Länge der Datenreihe zu kurz ist, um die theoretische Verteilung gut zu approximieren. Bei Anwendung der Daily-Simulation, die auf einem Modell für die Tagesniederschläge basiert, wird die Volatilität des Niederschlags systematisch unterschätzt (vgl. HANSEN und MAVROMATIS, 2001; DUBROVSKY et al., 2004). Deshalb kommt hier zur Optionsbewertung die stochastische Simulation zur Anwendung.

Dabei wird ausgehend von Tagesniederschlagsmengen, die in Berlin-Tempelhof während des Zeitraums vom 01. Januar 1948 bis zum 31. Dezember 2005 gemessen wurden, für jedes Jahr der jeweilige Niederschlagsindex berechnet. Im Ergebnis stehen 58 empirische Beobachtungswerte für den Index zur Verfügung. Mit Hilfe des MS-EXCEL-Add-In BEST-FIT wird getestet, welche Annahme bezüglich der Verteilung des Index zutreffend ist. Gemäß den Standardverfahren Chi-Quadrat-, Kolmogorov-Smirnov- und Anderson-Darling-Test stellt für den Kumulationsindex die Log-Normal-Verteilung und für den Defizitindex die Beta-Verteilung die beste Anpassung an die empirische Verteilung dar, wobei nur Verteilungen betrachtet wurden, die keinen Vorzeichenwechsel für die Unsicherheitsgröße erlauben. Im Rahmen der Simulation wird aus der geschätzten Verteilung 10 000 Mal ein Wert für den jeweiligen Niederschlagsindex gezogen, jeweils der Rückfluss der Option gemäß (6) bestimmt und mit dem risikolosen Zinssatz in Höhe von 5 % diskontiert. Der Mittelwert der diskontierten Rückflüsse entspricht der fairen Prämie und beläuft sich beim Kumulationsindex auf 118.2 € und beim Defizitindex auf 108.1 €.

<sup>4</sup> Zu beachten ist, dass in der Finanzoptionspreistheorie entwickelte präferenzunabhängige Verfahren zur Bewertung von Niederschlagsoptionen wegen der Nichthandelbarkeit des der Option zugrunde liegenden Niederschlagsindex nicht ohne weiteres angewendet werden können (vgl. JEWSON et al., 2005: 28-34).

## 2.4 Zur Vorgehensweise bei der Beurteilung der Hedging-Effektivität

Zu beachten ist, dass im Störterm der Produktionsfunktion (5) sowohl das Basisrisiko der Produktion als auch das geografische Basisrisiko zum Ausdruck kommen: Zum einen werden nur die Niederschläge im Bezugszeitraum des Index berücksichtigt. Zum anderen wird die Produktionsfunktion basierend auf Ertragsdaten am Ort der Produktion und dem Wettergeschehen an der Referenzmessstation bestimmt. Um die vom geografischen Basisrisiko und vom Basisrisiko der Produktion ausgehenden Effekte separieren zu können, wird bei der Einschätzung der risikomindernden Wirkung von Niederschlagsoptionen dreistufig vorgegangen. Da sich die Option immer auf die Niederschläge an der Referenzwetterstation Berlin-Tempelhof bezieht, unterscheiden sich die drei Stufen nicht bezüglich des Optionspreises  $F_0$  und des Rückflusses der Option  $F_T$ , sondern nur in der Bestimmung des Produktionserfolgs.

- In der ersten Stufe wird hypothetisch angenommen, dass sich der Ort der landwirtschaftlichen Produktion nicht in Ketzin, sondern in unmittelbarer Nähe der Referenzwetterstation in Berlin-Tempelhof befindet ( $Q_T$  statt  $\tilde{Q}_T$ ) und der Zusammenhang zwischen Ertrag und Niederschlagsindex nicht durch Zufallseffekte beeinflusst wird ( $\varepsilon_T = 0$ ). Der Weizenertrag in Stufe 1  $Q_T^1$  wird direkt aus dem jeweiligen Wert für den Niederschlagsindex in Berlin-Tempelhof abgeleitet:

$$Q_T^1 = \begin{cases} a_0 + a_1 \cdot I_T, & \text{wenn } I_T < a_2 \\ a_3, & \text{andernfalls} \end{cases} \quad (8)$$

- In der zweiten Stufe wird berücksichtigt, dass die Weizenproduktion in 39 km Entfernung von der Referenzwetterstation stattfindet (geografisches Basisrisiko). Weiterhin wird aber hypothetisch davon ausgegangen, dass der Zusammenhang zwischen Ertrag und Niederschlagsindex am Ort der Produktion rein deterministisch ist ( $\varepsilon_T = 0$ ). Der Weizenertrag in Stufe 2  $\tilde{Q}_T^2$  wird direkt aus dem jeweiligen Wert für den Niederschlagsindex am Ort der Produktion in Ketzin ( $\tilde{I}_T$  statt  $I_T$ ) abgeleitet:

$$\tilde{Q}_T^2 = \begin{cases} a_0 + a_1 \cdot \tilde{I}_T, & \text{wenn } \tilde{I}_T < a_2 \\ a_3, & \text{andernfalls} \end{cases} \quad (9)$$

- Der Wert für den Niederschlagsindex in Ketzin  $\tilde{I}_T$  wird unter Berücksichtigung einer noch zu bestimmenden Korrelation aus dem Wert für den Niederschlagsindex in Berlin Tempelhof  $I_T$  bestimmt.
- In der dritten Stufe wird realistischerweise sowohl das geografische Basisrisiko als auch der zufallsbehaftete Zusammenhang zwischen Ertrag und Niederschlag berücksichtigt (Basisrisiko der Produktion und geografisches Basisrisiko). Der Weizenertrag in Stufe 3  $\tilde{Q}_T^3$  wird aus dem jeweiligen Wert für den Niederschlagsindex an der Referenzwetterstation Berlin-Tempelhof und unter Berücksichtigung des Störterm der Produktionsfunktion  $\varepsilon_T$  abgeleitet:

$$\tilde{Q}_T^3 = \begin{cases} a_0 + a_1 \cdot I_T + \varepsilon_T, & \text{wenn } I_T < a_2 \\ a_3 + \varepsilon_T, & \text{andernfalls} \end{cases} \quad (10)$$

Zur Bestimmung der Verteilung für die Erlöse ohne Option (vgl. (1)) und mit Option (vgl. (2)) in den drei Stufen kommt erneut die stochastische Simulation (10 000 Simulationsläufe) zur Anwendung.

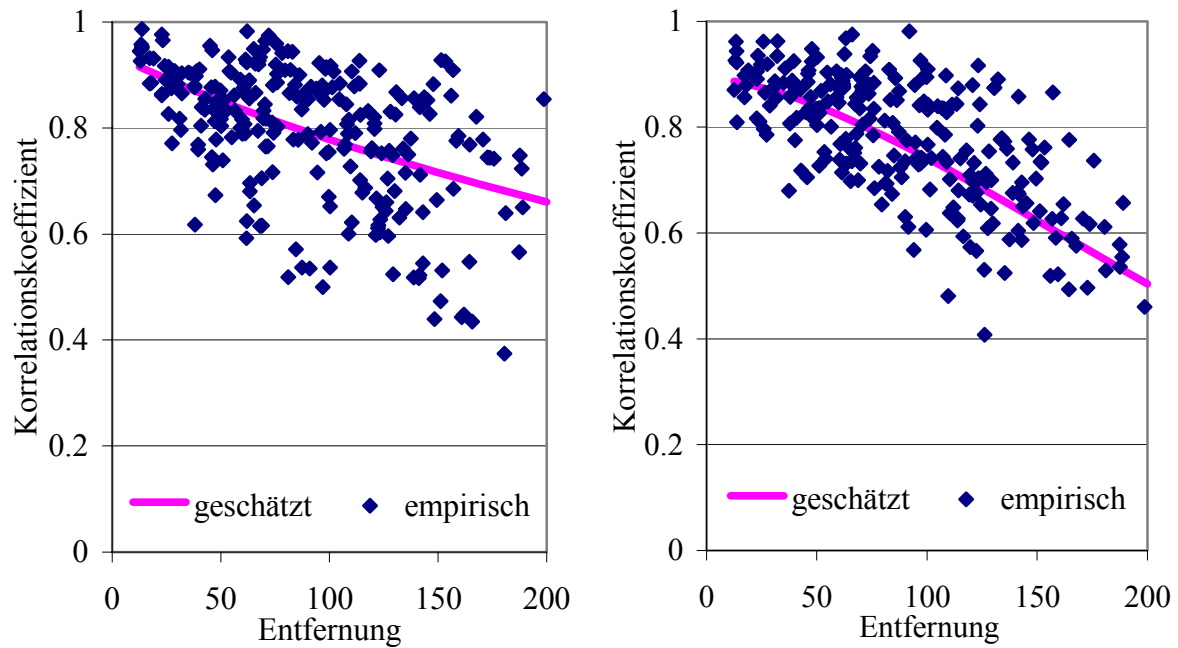
Um die für die Stufe 2 benötigte Korrelation zwischen dem Niederschlagsindex am Ort der Produktion und an der Referenzwetterstation zu bestimmen, wird eine Dekorrelationsanalyse durchgeführt. Dazu stehen Daten von 23 Wetterstationen in Berlin und Brandenburg über einen Zeitraum vom 1. Januar 1983 bis zum 31. Dezember 2003 zur Verfügung. Die Messstationen befinden sich in einer Entfernung von bis zu 100 km rund um Berlin-Tempelhof und sind relativ gleichmäßig im Raum verteilt. Zunächst werden die Korrelationskoeffizienten  $\rho_{i,j}$  zwischen den Werten für den Niederschlagsindex an den Wetterstationen  $i$  und  $j$  bestimmt. Anschließend werden die Entfernungen  $d_{i,j}$  zwischen den einzelnen Wetterstationen ermittelt. Zur Schätzung der sog. Dekorrelationsfunktion können in der hier vorliegenden Anwendung insgesamt 253 Korrelationskoeffizienten und die jeweils dazugehörige Entfernung genutzt werden. RUBEL (1996) schlägt für die Modellierung des raumbezogenen Zusammenhangs von Niederschlägen in Europa folgende nicht-lineare Dekorrelationsfunktion vor:<sup>5</sup>

$$\rho_{i,j} = b_1 \cdot \exp\left(-b_2 \cdot d_{i,j}^{b_3}\right) \quad (11)$$

Für den Kumulationsindex ergibt sich  $b_1 = 0.94$ ,  $b_2 = 0.0033$ ,  $b_3 = 0.88$  und für den Defizitindex  $b_1 = 0.89$ ,  $b_2 = 0.0001$ ,  $b_3 = 1.63$ . Das Bestimmtheitsmaß  $R^2$  beträgt beim Kumulationsindex 0.24 und beim Defizitindex 0.63. Das in Abbildung 1 dargestellte Scatterdiagramm macht allerdings deutlich, dass der Zusammenhang zwischen Entfernung und Korrelation mit zunehmender Entfernung unschärfer wird. Außerdem ist ersichtlich, dass die Korrelation zwischen dem Niederschlagsindex an zwei Wetterstationen umso geringer ist, desto größer die Entfernung ist. Bei einer Entfernung zwischen Berlin-Tempelhof und Ketzin in Höhe von 39 km weist der Kumulationsindex eine Korrelation von 0.87 und der Defizitindex eine Korrelation von 0.86 auf.

<sup>5</sup> Anzumerken ist, dass die Dekorrelationsfunktion von der Himmelsrichtung abstrahiert, in der man sich von der Messstation entfernt. Dadurch werden topografische Unterschiede vernachlässigt, die Einfluss auf die Niederschlagsmenge haben können. In Brandenburg kommen die topografischen Gegebenheiten der Annahme eines lage- und richtungsunabhängigen Zusammenhangs entgegen. Im Gebirgsraum wäre dies jedoch kritisch zu prüfen.

**Abbildung 1: Dekorrelationsanalyse für den Kumulationsindex (links) und den Defizitindex (rechts)**



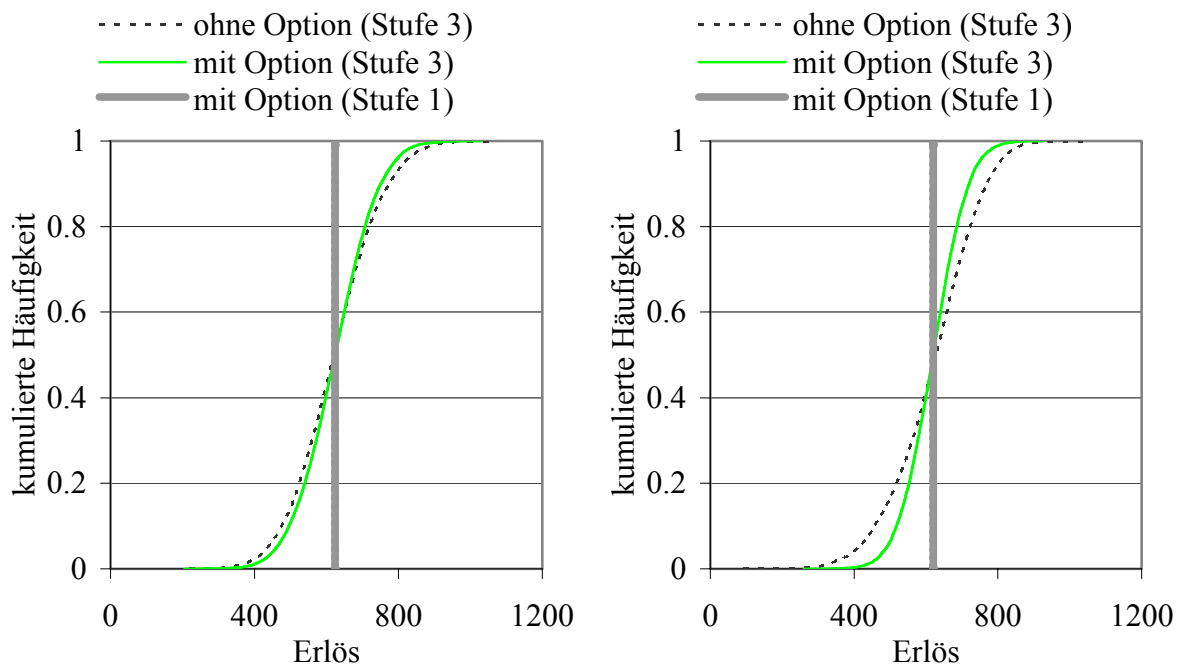
### 3 Ergebnisse

In Tabelle 3 sind zur Beurteilung der Hedging-Effektivität der beiden oben beschriebenen Niederschlagsoptionen der Erwartungswert, die Standardabweichung sowie ausgewählte Perzentile der Erlösverteilung unter Maßgabe des Kumulations- und Defizitindex für alle drei beschriebenen Stufen angegeben. Dabei wird jeweils die Situation ohne und mit Absicherung durch eine Niederschlagsoption betrachtet. In Abbildung 2 sind die Erlösverteilungen für ausgewählte Szenarien grafisch veranschaulicht.

**Tabelle 3: Kennzahlen der Erlösverteilungen ohne und mit Option\***

		Stufe 1		Stufe 2		Stufe 3	
geografisches Basisrisiko		ohne		mit		mit	
Basisrisiko der Produktion		ohne		ohne		mit	
Put-Option		ohne	mit	ohne	mit	ohne	mit
Kumulationsindex	Erwartungswert	624	624	624	625	624	623
	Standardabweichung	60	0	60	33	115	100
	5 %	543	624	544	569	436	461
	10 %	554	624	554	584	476	495
	50 %	611	624	610	624	620	624
	90 %	727	624	727	665	774	751
	95 %	742	624	742	681	815	787
Defizitindex	Erwartungswert	620	620	621	620	620	619
	Standardabweichung	91	0	91	50	120	78
	5 %	451	620	453	533	413	491
	10 %	489	620	489	556	457	518
	50 %	634	620	635	620	627	620
	90 %	728	620	728	684	768	720
	95 %	728	620	728	704	804	747

\* Alle Angaben in €/ha.

**Abbildung 2: Erlösverteilungen ohne und mit Absicherung für den Kumulationsindex (links) und den Defizitindex (rechts)**

Zunächst fällt auf, dass sich die Erwartungswerte für die Erlöse ohne und mit Option jeweils nicht wesentlich unterscheiden. Dies ist darin begründet, dass der Optionspreis als faire Prämie berechnet wurde, also die Option im Mittel „so viel bringt, wie sie kostet“. Geringfügige Unterschiede in den Erwartungswerten sind in der Zufallszahlenziehung begründet.

Mit Blick auf die Hedging-Effektivität einer Option lässt sich Folgendes feststellen:



- Stufe 1: Liegt kein Basisrisiko vor (Ort der Produktion in unmittelbarer Nähe der Referenzwetterstation und Zusammenhang zwischen Kumulationsindex und Ertrag nicht durch Zufallseffekte überlagert), dann kann der Landwirt durch den Erwerb einer Put-Option auf den Kumulations- oder Defizitindex das Erlösrisiko vollständig eliminieren. Dies ist deshalb möglich, weil die Auszahlung der Option perfekt negativ mit den Erlösen aus der Weizenproduktion korreliert ist (linear-limitationale Produktionsfunktion).
- Stufe 2: Berücksichtigt man allerdings, dass sich der Ort der Produktion in 39 km Entfernung von der Referenzwetterstation befindet, dann bleibt zwar die Verteilung der Erlöse ohne Option im Vergleich zu Stufe 1 unverändert, weil letztlich dem Niederschlagsindex in Ketzin die gleiche Verteilung zugrunde liegt wie in Berlin-Tempelhof. Trotzdem kann die Standardabweichung der Erlöse durch den Einsatz der Put-Option auf den Kumulations- oder Defizitindex nur noch um etwa 45 % reduziert werden. Schließlich können Fälle auftreten, in denen der Landwirt einen Rückfluss aus der Option erzielt, obwohl kein Ertragsausfall zu verzeichnen war (und vice versa), weil sich der Niederschlag in Ketzin und Berlin-Tempelhof unterscheidet. Im Vergleich zu den Ergebnissen von Stufe 1 zeigt sich, dass die risikomindernde Wirkung der Option mit zunehmender Entfernung von der Referenzwetterstation abnimmt.
- Stufe 3: Berücksichtigt man realistischerweise sowohl das geografische Basisrisiko als auch einen zufallsbehafteten Zusammenhang zwischen Ertrag und Kumulationsindex, dann kann die Standardabweichung der Erlöse durch den Erwerb der Put-Option auf den Kumulationsindex nur noch um 13 % reduziert werden. Beim Einsatz der Put-Option auf den Defizitindex gelingt noch eine Verminderung der Standardabweichung der Erlöse um 35 %. Die im Vergleich zu Stufe 2 festzustellende Abnahme der Hedging-Effektivität der Option ist auf die zusätzliche Berücksichtigung des Basisrisikos der Produktion zurückzuführen.

Wie der Modellrechnungen verdeutlichen, erodiert die Hedging-Effektivität einer Put-Option auf den (besten) Kumulationsindex nahezu vollständig, wenn man das geografische Basisrisiko und das Basisrisiko der Produktion berücksichtigt. Bei der Option auf den Defizitindex sinkt die von der Put-Option ausgehende risikomindernde Wirkung zwar auch, wenn das geografische Basisrisiko und das Basisrisiko der Produktion berücksichtigt werden. Allerdings kann durch die Option selbst dann noch eine beachtliche Risikoreduzierung erzielt werden. Dies ist hauptsächlich darin begründet, dass der Erklärungsgehalt der Produktionsfunktion für den Weizenantrag in Abhängigkeit vom Defizitindex viel höher ist als beim Kumulationsindex.

In Stufe 3 verbleiben sowohl das geografische Basisrisiko als auch das Basisrisiko der Produktion selbst bei Einsatz einer optimal ausgestalteten Option beim Landwirt: Die Standardabweichung der Erlöse entspricht der Volatilität des Störterms in der Produktionsfunktion multipliziert mit dem über die Laufzeit der Option diskontierten Produktpreis

( $10.4 \cdot 10 \cdot e^{-5\% \cdot 0.75} = 100$  und  $8.1 \cdot 10 \cdot e^{-5\% \cdot 0.75} = 78$ ). Die Standardabweichung der Erlöse in Stufe 2 ergibt sich allein aus dem geografischen Basisrisiko. Unabhängig vom geografischen Basisrisiko und vom Basisrisiko der Produktion würde sich auch bei Einsatz einer optimal ausgestalteten Option ein weiteres Basisrisiko ergeben, wenn die Produktionsfunktion keine lineare oder linear-limitationale Funktionsform aufweist (z.B. quadratisch). Schließlich kann dann die Option nicht so gestaltet werden, dass deren Auszahlung perfekt negativ mit den erwarteten Erlösen aus der Produktion korreliert ist. Natürlich können mehrere Derivate miteinander kombiniert werden, um nichtlineare Auszahlungsströme zu erzeugen.

#### 4 Zusammenfassung und Ausblick

Die Modellrechnungen haben gezeigt, dass (i) die Entfernung zwischen dem Ort der landwirtschaftlichen Produktion und der Referenzwetterstation sowie (ii) das Basisrisiko der Produktion bzw. eng damit verbunden die Spezifikation des Index, auf den sich die Niederschlagsoption bezieht, die Hedging-Effektivität von Niederschlagsoptionen in außerordentlich starkem Maße beeinflusst. Befindet sich die Referenzwetterstation in unmittelbarer Nähe des Ortes der Produktion und besteht ein sehr enger Zusammenhang zwischen Ertrag und Niederschlagsindex, dann ist der Absicherungseffekt, der durch den Einsatz von Niederschlagsoptionen erzielt werden kann, sehr beachtlich. Befindet sich der Ort der landwirtschaftlichen Produktion in auch nur geringer Entfernung zur nächstgelegenen Referenzwetterstation (z.B. 39 km in der hier vorliegenden Anwendung), dann sinkt der Absicherungseffekt z.T. deutlich. Liegt der Option zudem noch ein Index zugrunde, der nur eine geringe Korrelation zum Ertrag aufweist (wie hier zwischen dem oftmals vorgeschlagenen Kumulationsindex und dem Weizenertrag festgestellt), dann sinkt der Absicherungseffekt noch weiter. Bedenkt man noch die in diesem Beitrag nicht berücksichtigten Transaktionskosten und eine eventuelle Risikoprämie, dann erscheint der Einsatz von Wetterderivaten als effektives Risikomanagementinstrument in der Getreideproduktion im Besonderen und in der Landwirtschaft im Allgemeinen fraglich.

Aus den Feststellungen folgt, dass potenzielle Anbieter von Niederschlagsoptionen ein möglichst dichtes Netz von Wetterstationen als Referenzpunkte zulassen und ein möglichst breit gefächertes Spektrum an unterschiedlich spezifizierten Wetterderivaten anbieten sollten. Dies betrifft zum einen den Derivattyp. Beispielsweise könnte bei einer quadratischen Produktionsfunktion der kombinierte Einsatz einer Put- und Call-Option sowohl eine Absicherung gegen zu geringe als auch zu starke Niederschläge bewirken. Zum anderen betrifft dies aber auch die Gestaltung des Index, die Höhe der Tick-Size und die Höhe des Strike-Preises. Viele Referenzwetterstationen und in unterschiedlichster Weise ausgestaltete Wetterderivate führen zwar zu einer Zersplitterung der Nachfrage. Letztlich schafft dies aber erst die Voraussetzung für ein Interesse seitens der Landwirte.

Weiterer Forschungsbedarf besteht bezüglich der wirkungsorientierten Spezifikation der Auszahlungsfunktion einer Option. Die bislang im Mittelpunkt der wissenschaftlichen Dis-

kussion stehenden kumulierten Niederschläge dürften aus Sicht vieler Produzenten zu wenig zielgerichtet sein. Ein Alternativvorschlag wurde hier in Form eines Defizitindex gemacht. Aus Sicht der Landwirtschaft könnte es aber auch sinnvoll sein, in den der Option zugrunde liegenden Index nicht nur den Niederschlag, sondern auch die Temperatur, die Windstärke etc. einfließen zu lassen. Damit könnte z.B. dem Umstand Rechnung getragen werden, dass geringe Niederschlagsmengen bei hohen Temperaturen zu höheren Ertragseinbußen führen, als bei niedrigen Temperaturen. Eine weitere Forschungsaufgabe betrifft die Bewertung von Wetterderivaten.

## 5 Literatur

- BERG, E.; SCHMITZ, B.; STARP, M.; TRENKEL, H. (2005): Wetterderivate: Ein Instrument im Risikomanagement für die Landwirtschaft? *Agrarwirtschaft* 54: 158-170.
- CAO, M.; LI, A.; WEI, J. (2003): A New Class of Financial Instruments. Working-Paper, University of Toronto.
- DUBROVSKY, M.; BUCHTELE, J.; ZALUD, Z. (2004): High-Frequency and Low-Frequency Variability in Stochastic Daily Weather Generator and its Effect on Agricultural and Hydrologic Modelling. *Climatic Change* 63: 145-179.
- HANSEN, J.W.; MAVROMATIS, T. (2001): Correcting Low-frequency Variability Bias in Stochastic Weather Generators. *Agricultural and Forest Meteorology* 109: 297-310.
- JEWSON, S.; BRIx, A.; ZIEHMANN, C. (2005): *Weather Derivative Valuation*. Cambridge: Cambridge University Press.
- MUBHOFF, O.; ODENING, M.; XU, W. (2005): Zur Bewertung von Wetterderivaten als innovative Risikomanagementinstrumente in der Landwirtschaft. *Agrarwirtschaft* 54: 197-209.
- RICHARDS, T.J.; MANFREDO, M.R.; SANDERS, D. R. (2004): Pricing Weather Derivatives. *American Journal of Agricultural Economics* 86: 1005-1017.
- RUBEL, F. (1996): Scale Dependent Statistical Precipitation Analysis. *Proceedings of the International Conference on Water Resource and Environment Research*: 317-324.
- SCHIRM, A. (2001): Wetterderivate – Einsatzmöglichkeiten und Bewertung. Working-Paper, Graduiertenkolleg: Allokation auf Finanz- und Gütermärkten, Universität Mannheim.
- SKEES, J. (2002): The Potential Role of Weather Markets for U.S. Agriculture. In: Inman, L.; Williamson, L.; Scorsone, E. (Hrsg.): *Agricultural Situation and Outlook*, Fall 2002: 77-81, Kentucky: University of Kentucky.
- STOPPA, A.; HESS, U. (2003): Design and Use of Weather Derivatives in Agricultural Policies: the Case of Rainfall Index Insurance in Morocco. Paper presented at the International Conference: Agricultural Policy Reform and the WTO: Where are we heading, Capri (Italy), June 23-26, 2003.
- TURVEY, C. G. (2001): Weather Derivatives for Specific Event Risks in Agriculture. *Review of Agricultural Economics* 23: 333-351.
- VAN ASSELDONK, M.A.P.M. (2003): Insurance against weather risk: Use of heating degree-days from non-local stations for weather derivatives. *Theoretical and Applied Climatology* 74: 137-144.

## **IV. INDIFFERENCE PRICING OF WEATHER DERIVATIVES <sup>\*</sup>**

von

Wei Xu<sup>1)</sup>, Martin Odening<sup>1)</sup> and Oliver Mußhoff<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> Humboldt-Universität zu Berlin

Department of Agricultural Economics and Social Science

<sup>2)</sup> Georg-August-Universität Göttingen

Department of Agricultural Economics and Rural Developmen

---

<sup>\*</sup> Published in American Journal of Agricultural Economics 90(4/2008):979-993.

## Indifference Pricing of Weather Derivatives

### Abstract

Weather derivatives are difficult to price due to the non-tradability of weather and the absence of liquid secondary markets for these contracts. We use the concept of indifference pricing to develop a model for calculating the willingness to pay for weather insurance. Compared with other approaches, indifference pricing is less ambitious since it does not attempt to predict a transacted market price. The application of indifference pricing in the case of German crop producers shows that their willingness to pay for weather insurance depends on the production program and varies regionally. This suggests the development of tailored insurance products.

### Keywords

incomplete markets, indifference pricing, weather insurance

## 1 Introduction

Weather is undeniably one of the most important sources of risk in agriculture, and it seems that fluctuations of temperature and precipitation have even increased in the last decade due to global climate changes (Karl and Trenberth 2003). Perhaps the most obvious impact of weather risk is on crop yields, but its relevance is not limited to crop production. The performance of livestock farms, the turnover of processors, the use of chemicals and fertilizers and the demand for many food products also depend on the weather. Hence, large parts of the agribusiness sector are affected by weather risks.

In the past, the answer of producers to such bad-weather risks was to buy insurance. Another solution came in the mid-1990's with weather derivatives, a class of financial instruments that permit the trade of weather-related risks.<sup>1</sup> Until now most transactions have taken place in the energy sector, but some promising applications also exist in agriculture (Skees 2001). Despite this recent progress in weather risk markets however, their future remains uncertain.

A growing literature aims at assessing the hedging effectiveness of agricultural weather derivatives, as well as the farmer's willingness to pay for index-based weather insurance (Edwards and Simmons 2004, Vedenov and Barnett 2004, Fleege et al. 2004). Three interrelated issues are involved in the economic evaluation of these instruments: first, the statistical modeling of relevant weather variables; second, the estimation of a weather-yield relationship and third, the development of an adequate pricing model. While the first two problem areas can be

---

<sup>1</sup> Here we use the terms 'weather derivatives' and 'index based weather insurance' synonymously, though there is a controversial discussion about this issue (cf. Turvey 2005).

handled fairly well with existing statistical tools, the pricing of weather derivatives is challenging theoretically. This is because weather cannot be traded, i.e., the market for weather risk is incomplete. Hence a straightforward application of standard pricing models for financial derivatives is impossible. Actually, the poor transparency of pricing algorithms employed by sellers is considered a major cause of the slow development of weather markets (Varangis, Skees and Barnett 2002).

This problem has been previously recognized and several proposals have been made in the literature for pricing weather derivatives. These include actuarial approaches (Jewson and Brix 2005), extended risk neutral valuation (Hull 2006, Turvey 2005) and a consumption based asset-pricing model (Cao and Wei 2004, Richards, Manfredo and Sanders 2004). Comparisons between these approaches indicate that remarkable differences in the resulting derivatives' prices may occur (cf. Myers, Liu and Hanson 2005). Nonetheless there is still no consensus about the "best" way to price weather derivatives, since all existing methods have their particular pitfalls. Some methods lack a sound theoretical basis, like the burn rate method, while others (in particular equilibrium models) have to resort to simplifying assumptions in order to become tractable.

In this paper we want to contribute to this ongoing discussion by introducing a new approach, namely indifference pricing. Indifference pricing starts with the appealing idea that the amount of money at which a potential buyer (or seller) of weather insurance is indifferent, in terms of expected utility between buying (or selling) and not buying (selling), constitutes an upper (lower) limit for the contract price. Such an approach can take into account the particular economic situation of individual buyers (sellers). An advantage of indifference pricing is that it does not require the assumption of continuous trading which is at the heart of modern financial economics. It can also be applied in a discrete time setting where positions are retained once they have been realized. We think this is a realistic perspective if we consider weather derivatives as insurance contracts.

The purpose of this paper is to take up the general idea of indifference pricing and to develop a model that can be used to calculate the willingness to pay for weather insurance in an agricultural context. Based on this model, we want to assess the potential demand and supply for weather derivatives under different conditions. This assessment is clearly case specific, but it could also easily be generalized. Such an analysis may answer the aforementioned question of whether weather derivatives will permeate agriculture or not. From an ex-post perspective, our model may rationalize the (non)emergence of index based weather insurance contracts.

The paper is organized as follows. The next section provides an overview about pricing methods for incomplete markets and introduces the indifference pricing approach in general. After this a specific indifference pricing model is developed that is applicable for an over-the-counter trade of weather derivatives in agriculture. The subsequent section applies this model to crop farms in Germany and derives farmer willingness to pay for weather insurance under

varying conditions. The paper ends with conclusions about the potential trading volume of weather derivatives in agriculture.

## 2 Pricing in Incomplete Markets

Financial derivatives are usually priced in a risk-neutral valuation framework. Financial theory asserts that the price of a contingent claim  $F$ , which depends on a stochastic variable  $I$ , can be calculated according to (Neftci 1996, p. 297):

$$F = D \cdot E_Q(W_T(I)) \quad (1)$$

where  $I$  can be a traded asset like a stock or a non-traded asset like a weather index.  $W_T(I)$  denotes the payoff of the derivative at expiration time  $T$  and  $D$  is a discount factor  $e^{-rT}$  with the risk-free interest rate  $r$ .  $E$  represents an expectation, conditional on the information available at present, where the subscript  $Q$  indicates that the expectation of the derivative payoff is to be calculated by means of a risk-neutral probability measure, instead of by a real world probability measure  $P$ . (1) can also be written

$$F = D \cdot E_P\left(\frac{dQ}{dP} \cdot W_T(I)\right). \quad (2)$$

Therein  $dQ/dP$  denotes the Radon-Nikodym derivative of  $Q$  with respect to  $P$ .<sup>2</sup> This change of measure turns the stochastic process of the variable  $I$  into a martingale.

In the case of an option on a (non-dividend paying) stock that follows a geometric Brownian motion, the change of measure is achieved by adapting the drift rate of the stochastic process to the risk-free interest rate. This means that more weight is given to unfavorable events, which makes sense in a risk-averse world. According to the first fundamental lemma of asset pricing, the use of risk-neutral probabilities ensures that the derivative price is arbitrage-free (Duffie 2001). The change of measure of an asset's stochastic process is closely related to the concept of the market price of risk. Actually the drift rate of the asset's stochastic process is corrected by a parameter that reflects the market price of risk  $\lambda$ .<sup>3</sup>

If the capital market is complete, i.e., any contingent claim can be attained through a self-financing trading strategy, then one can show that the risk-neutral measure (equivalent martingale measure) is unique (Föllmer and Schied 2002, p. 23). Weather derivatives, however, are a typical example of an incomplete market, since weather is not a traded variable. In prin-

<sup>2</sup>  $D \cdot (dQ/dP)$  is also called pricing kernel or state-price density.

<sup>3</sup> Note that the market price of risk already comes into play in a complete market setting. However, an explicit estimation of this parameter is not required, since the risk adjusted drift rate of the underlying is simply the risk neutral drift rate (see for example Hull 2006, p. 715).

ciple, (extended) risk-neutral valuation can be still carried out. The problem with pricing in incomplete financial markets is that the no-arbitrage condition does not result in a unique price. Many equivalent martingales exist and as a result, only bounds for prices on contingent claims can be provided (Benth 2004, p. 88, Jensen and Nielsen 1996, p. 221-222). Formally stated, arbitrage-free prices lie in the range

$$\left[ \inf_{Q \in \mathbf{Q}} D \cdot E_Q(W_T(I)), \sup_{Q \in \mathbf{Q}} D \cdot E_Q(W_T(I)) \right] \quad (3)$$

where  $\mathbf{Q}$  is the set of all equivalent martingales and  $\inf$  and  $\sup$  denote the largest lower bound and the least upper bound, respectively. Unfortunately, the no-arbitrage price interval is in general large and hence not useful (Eberlein and Jacod 1997).

It is important to realize that it is impossible to calculate a unique price for a derivative written on a non-traded asset without further information about the market participants' risk preference. Several proposals have been made in the literature in order to attain a unique valuation of financial claims in incomplete markets. Alaton, Djehiche and Stillberger (2002) determine the market price for weather risk to be an implicit parameter, such that the theoretical pricing model matches the observable market prices for some contracts. Of course this approach is only practical if a market already exists for weather derivatives. Turvey (2005) proposed to estimate the market price of risk by using the capital asset pricing model, (CAPM). Due to the CAPM, the following equation is straightforward:

$$\mu = r + (\mu_M - r) \cdot \rho \cdot \frac{\sigma}{\sigma_M} \quad (4)$$

where  $\mu$  and  $\sigma$  are the expected value and the standard deviation of the returns of an asset, respectively. Variables  $\mu_M$  and  $\sigma_M$  stand for the corresponding values of the market portfolio  $M$ , and  $\rho$  denotes the correlation between the asset and the market portfolio. Combining (4) with the definition  $\lambda = (\mu - r)/\sigma$ , an estimable expression for  $\lambda$  can be obtained:

$$\lambda = \rho \cdot \frac{(\mu_M - r)}{\sigma_M}. \quad (5)$$

Turvey argues in accordance with Hull (2006, p. 552) that the correlation between weather indexes and return in a capital market is small or negligible. That means that the weather variability is not a systematic risk. Consequently, the market price of the weather risk should be zero and no correction of the distribution of the weather index is necessary. This means the expectation in (1) can be calculated with real world probabilities.

Cao and Wei (2004) and Richards, Manfredo and Sanders (2004) apply an extended version of Lucas' (1978) equilibrium pricing model, where direct estimation of the weather risk's market price is avoided. Instead, pricing is based on the stochastic processes of the weather



index and an aggregated dividend  $\delta_t$ . In this model, a representative agent chooses a trading strategy that maximizes the present value of expected lifetime utility. The latter depends on consumption  $C_t$ ,  $t = 0, \dots, T$ . The first order conditions of this maximization problem, together with the equilibrium condition,  $C_t = \delta_t$ , imply the following price equation:

$$F = D \cdot E \left( \frac{\partial u(\delta_T)}{\partial \delta_T} \bigg/ \frac{\partial u(\delta_0)}{\partial \delta_0} \cdot W_T \right). \quad (6)$$

where  $u(\delta_t)$  is the period utility. (6) resembles the structure of the pricing equation (2). The only difference is that the pricing kernel  $dQ/dP$  is replaced by a marginal rate of substitution.

Myers, Liu and Hanson (2005) criticize the Lucas approach, since it remains unclear whose consumption should be used in the model (6). It is likely that the aggregation level of the consumption data will impact the correlation between the dividend process and the weather process. Moreover, the Lucas model prices the weather insurance contract as if it were traded on a liquid secondary market. This assumption seems unrealistic for the trading of index based weather insurance in agriculture.

The indifference pricing approach that we pursue here is also based on utility maximization. In contrast to the Lucas model it is not an equilibrium model. Instead of assuming a representative agent, the indifference pricing approach considers an individual agent who faces specific risks that depend on the weather's impact on their particular business. The basic idea is that agents (farmers or insurance companies) have an incentive to buy/sell weather insurance if thereby their utility (of final wealth) is increased. In this setting it is natural to define the indifference buy price  $F_b^i$  as the price at which an investor  $i$  is indifferent between a) paying  $F_b^i$  now and receiving the claim from the derivative at expiration and b) not having the claim and paying the price. This comparison has to take into account the initial wealth  $x$  of the investor as well as all possible investment and trading strategies  $\mathcal{G} \in \theta$ . Define  $V(x)$  as the maximal utility that can be achieved at time  $T$  starting from a given present endowment  $x$  and without having the derivative, then

$$V(x) = \sup_{\mathcal{G} \in \theta} E \left( u \left( x + \int_0^T \mathcal{G} dS_t \right) \right). \quad (7)$$

where  $dS$  is the stochastic price change of a capital market asset. Accordingly, the maximal utility that is attainable when buying  $k$  units of the derivative at price  $F$  is

$$V(x - F_b^i, k) = \sup_{\mathcal{G} \in \theta} E \left( u \left( x + \int_0^T \mathcal{G} dS_t - k \cdot F_b^i + k \cdot W(I) \right) \right). \quad (8)$$

The indifference price of the derivative is then implicitly expressed as:

$$V(x) = V(x - F_b^i, k). \quad (9)$$

An indifference selling price  $F_s^i$  can be defined quite analogously. Neither  $F_b^i$  nor  $F_s^i$  should be interpreted as market prices for the derivative. Rather, they could mark the starting point for price negotiations between potential sellers and buyers. Note that so far, no specific restrictive assumptions about the stochastic process of the underlying weather index have been made.

What is the relationship between indifference pricing and the above discussion of determining an equivalent martingale in the case of incomplete markets? It can be shown that, under the assumption of an exponential utility function, the risk neutral measure  $Q$  implied by indifference pricing equals the minimal entropy measure (Frittelli 2000). This means that among all equivalent martingale measures one chooses the measure  $Q$  that is closest to  $P$ . Apparently the indeterminacy of the equivalent martingale measure is resolved by the choice of a particular utility function. Indifference pricing can also be related to the aforementioned market price of risk (5). As always, the indifference price for a (European) claim on a non-traded asset can be calculated as an expected value of the payoffs under a risk neutral measure. Assuming a geometric Brownian motion with drift rate  $\mu$  and variance  $\sigma^2$  for the non-traded asset and exponential preferences, Monoyios (2004, 2007) asserts that the risk-adjusted drift rate of the non-traded asset is given by  $\mu - \rho \cdot \sigma \cdot \lambda$ . Therein  $\lambda$  is defined analogous to (5) as  $(\mu_0 - r)/\sigma_0$  where  $\mu_0$  and  $\sigma_0$  denote the drift rate and the volatility of a traded asset that is correlated with the non-traded one. The basis risk that is inherent in a contingent claim on the non-traded asset and that cannot be hedged away is captured by the correlation coefficient  $\rho$ .

A nice property of indifference prices is that they recover familiar Black-Scholes prices in the case of complete markets (cf. Henderson and Hobson 2007). This is not true for incomplete markets. A distinguishing feature is that indifference prices are non-linear in the number of traded contracts  $k$ . This means that  $2 \cdot F_b^i(k=1)$  is not the indifference price for  $2 \cdot W$ , and is simply due to the non-linearity of the utility function. Davis (1997) suggests a linear pricing rule, which is similar to the indifference price. He invokes the economic principle of “zero marginal rate of substitution”, which in this context means that an investor cannot increase his expected utility by diverting a small amount of the derivative into his portfolio for price  $F^*$ . Formally stated, the marginal utility price  $F^*$  is defined by

$$\frac{\partial}{\partial k} V(x - F^*, k) \Big|_{k=0} = 0. \quad (10)$$

The marginal utility price (10) can be considered a special indifference price with an infinitesimal  $k$ . Both the Davis model and the Lucas model derive such a price that the investor takes a net position of zero in the claim. In contrast, indifference pricing considers an agent who wants to issue or buy  $k > 0$  units of the contingent claim. Doing so at the marginal price would in general decrease the expected utility of the agent (cf. Becherer 2003).

Practical application of both indifference pricing and marginal-pricing are rare, since explicit solutions of (9) or (10) are difficult to obtain.<sup>4</sup> A major simplification of the calculation of indifference prices can be attained if the set of possible trading strategies is restricted. Davis (2001), for example, considers an energy supplier who produces and sells gas at the current (stochastic) market price, but makes no investment decisions. Assuming a logarithmic utility function and a geometric Brownian motion for the weather index, Davis proves that the marginal price  $F^*$  for an option on an HDD index can be calculated with a modified Black-Scholes formula. In an extreme scenario no trading of the derivative and the investment goods are allowed, i.e.,  $\theta = \{0\}$ . Becherer (2003) shows that in this case, the indifference pricing approach coincides with the well known actuarial principle of equivalent utility. In the absence of dynamic trading strategies (9) simplifies to

$$E(u(x)) = E(u(x - k \cdot F + k \cdot W_T)). \quad (11)$$

The non-trading assumption is less restrictive than it appears at first glance, at least for agricultural applications. At the time being, the contracts that are available for agricultural producers are tailored products that are offered over the counter by insurance companies (Skees 2001). The objective for a typical farmer purchasing these contracts is to hedge weather related risks rather than to trade them. Once a contract has been purchased, the farmer keeps it until expiration. It is also unlikely that a liquid market for index-based insurance contracts will develop, because they are designed to meet a very specific demand. Moreover, agricultural production decisions are made at the beginning of a planning period and cannot be changed during the vegetation period. That means a farmer cannot adjust his “investment portfolio”, even when new weather information becomes available. Based on this idea we develop an indifference pricing model for weather derivatives that are traded over the counter (OTC).

### 3 An Indifference Pricing Model for Weather Derivatives

In what follows we consider two market participants, a seller (bank or insurance company) and a buyer. In order to ease the calculation of the indifference price we follow Broucker et al. (2006) and assume a two-date economy. At  $t = 0$  both agents optimize their investment portfolios in order to maximize their terminal wealth at time  $T$ . No trading of the derivative or adjustment of the investment portfolio is allowed between these two dates. First we consider the decision-making process of the seller. At the beginning of the planning period the seller is endowed with initial wealth  $x_s$ . He has to determine the amount of capital,  $\alpha_s$ , to be invested

---

<sup>4</sup> An exception is Musiela and Zariphopoulos (2004) who present a closed form solution for an indifference price, assuming an exponential utility function and a diffusion process for the non-traded asset.

in a risky capital market portfolio. The residual capital is invested in a risk-free asset. The value of this portfolio at  $T$  is then:

$$X_s^{without} = (x_s - \alpha_s) \cdot q_f + \alpha_s \cdot q_s, \text{ with } q_f = 1 + r_f, q_s = 1 + r_s. \quad (12)$$

$r_s$  and  $r_f$  denote the return of the capital market investment and the return of the risk-free asset, respectively. Now assume that the investor can additionally sell  $k$  shares of the weather contract for a price  $F_s(I)$ .<sup>5</sup> With the opportunity to sell weather contracts the terminal wealth of the derivative writer is:

$$X_s^{with} = (x_s - \alpha_s + k \cdot F_s) \cdot q_f + \alpha_s \cdot q_s - k \cdot W_T(I). \quad (13)$$

The decision-making process of the buyer is quite analogous, but instead of investing in a market portfolio he spends  $\alpha_b$  shares of capital for a risky production activity, which to some extent depends on weather conditions. Without investing in weather contracts, the final value of his portfolio is:

$$X_b^{without} = (x_b - \alpha_b) \cdot q_f + \alpha_b \cdot q_b, \text{ with } q_b = 1 + r_b. \quad (14)$$

$r_b$  denotes the return on production. If there is an opportunity to buy  $k$  units of the weather contract, the terminal value of this portfolio at  $T$  expands to:

$$X_b^{with} = (x_b - \alpha_b - k \cdot F_b) \cdot q_f + \alpha_b \cdot q_b + k \cdot W_T(I). \quad (15)$$

Next we derive the seller's indifference price. According to (9) the "fair price" for the seller is given by:

$$\sup_{\alpha_s} E[u(X_s^{without})] = \sup_{\alpha_s} E[u(X_s^{with})]. \quad (16)$$

In order to get a closed form solution of the indifference price, we replace the expected utility in (16) by its certainty equivalent CE and approximate it using Pratt's Theorem:<sup>6</sup>

$$CE = E(X) - \frac{\gamma}{2} \cdot \sigma^2(X). \quad (17)$$

$E(X)$  and  $\sigma^2(X)$  are the expected value and the variance of the terminal wealth, respectively, and  $\gamma > 0$  denotes the absolute risk aversion parameter. It is well known that eq. (17)

<sup>5</sup> We are grateful to an anonymous reviewer for pointing out that one can think of  $k \cdot F_s$  as the premium paid for an insurance contract with the indemnity of  $k \cdot W$ . The division of the insurance premium into contract size,  $k$ , and price per contract,  $F_s$ , is somehow artificial since  $F_s$  is valid for a specific  $k$ . This notation is, however, convenient for the graphical depiction of our results.

<sup>6</sup> With this specification our model is similar to that of Edwards and Simmons (2004). The main difference is that Edwards and Simmons assume an exogenous price when calculating the demand for weather derivatives of Australian wheat producers.

is only valid in the case of normally distributed random variables and an exponential utility function:

$$u(X) = -e^{-\gamma \cdot X}. \quad (18)$$

These assumptions are rather limiting since skewness or fat tails of the distributions of the weather index or the production returns are ruled out. Moreover, a constant absolute risk aversion on the part of the decision makers is implied. Later on in the application of our model, we relax these assumptions and utilize the definition (16) of the indifference price. This procedure allows an assessment of the error that is made if a mean-variance framework is used although the underlying assumptions are not fulfilled.

In a mean-variance framework the definition (16) of the indifference price becomes:

$$\sup_{\alpha_s} \left( E(X_s^{without}) - \frac{\gamma_s}{2} \cdot \sigma^2(X_s^{without}) \right) = \sup_{\alpha_s} \left( E(X_s^{with}) - \frac{\gamma_s}{2} \cdot \sigma^2(X_s^{with}) \right). \quad (19)$$

Recalling the definitions of  $X_s^{without}$  and  $X_s^{with}$  given in equations (12) and (13) yields an explicit expression for the certainty equivalent of the terminal wealth, without and with the weather derivative, in terms of the expected returns, variances and covariances of the involved random variables

$$CE^{without} = x_s \cdot q_f + \alpha_s \cdot (E(q_s) - q_f) - \frac{\gamma_s}{2} \cdot \alpha_s^2 \cdot \sigma_{q_s}^2. \quad (20)$$

and

$$\begin{aligned} CE^{with} = & x_s \cdot q_f + k \cdot F_s \cdot q_f + \alpha_s \cdot (E(q_s) - q_f) - k \cdot E(W) \\ & - \frac{1}{2} \cdot \gamma_s \cdot \alpha_s^2 \cdot \sigma_{q_s}^2 - \frac{1}{2} \cdot \gamma_s \cdot k^2 \cdot \sigma_W^2 + \gamma_s \cdot \alpha_s \cdot k \cdot COV(q_s, W) \end{aligned} \quad (21)$$

where  $E(q_s)$  and  $E(W)$  stand respectively for the expected  $q_s$  and for the expected payoff of the weather derivative.  $\sigma_{q_s}^2$  and  $\sigma_W^2$  denote the corresponding variances and  $COV(q_s, W)$  is the covariance between  $q_s$  and the derivative's payoff. Via the first order conditions we obtain the following solutions for the optimal shares of the seller's investment on the financial market  $\alpha_s^{*without}$  and  $\alpha_s^{*with}$ :

$$\alpha_s^{*without} = \frac{E(q_s) - q_f}{\gamma_s \cdot \sigma_{q_s}^2}. \quad (22)$$

$$\alpha_s^{*with} = \frac{E(q_s) - q_f + \gamma_s \cdot k \cdot COV(q_s, W)}{\gamma_s \cdot \sigma_{q_s}^2}. \quad (23)$$

Equation (23) states that the optimal capital share, which is invested into the market portfolio, decreases in case of a negative covariance between  $q_s$  and  $W$ . This is not surprising since  $W$  means a negative payoff for the seller.

Inserting  $\alpha_s^{*without}$  and  $\alpha_s^{*with}$  into (20) and (21), equating these expressions and solving for  $F_s$  results in the desired equation for the price threshold of the seller:

$$F_s = \frac{1}{q_f} \cdot (E(W) + \pi_s). \quad (24)$$

with

$$\pi_s = -\frac{1}{2} \cdot \gamma_s \cdot k \cdot \sigma_W^2 \cdot (\rho_{q_s, W}^2 - 1) - \frac{\sigma_W}{\sigma_{q_s}} \cdot (E(q_s) - q_f) \cdot \rho_{q_s, W}. \quad (25)$$

where  $\rho_{q_s, W}$  measures the correlation between the derivative's payoff and the return of the market portfolio. (24) has a simple actuarial interpretation. The indifference price is the present value of the expected derivative payoff plus a risk premium, which can be positive or negative. The sign of  $\pi_s$  depends on the sign and the magnitude of the correlation  $\rho_{q_s, W}$ . If  $\rho_{q_s, W}$  is zero or negative, the seller will require a positive premium in addition to the discounted expected value of the payoffs. This is under the assumption that the investment in the capital market will only be worthwhile if the expected return on the capital market,  $E(q_s)$ , is larger than the risk-free interest rate  $q_f$ . For a large positive value of  $\rho_{q_s, W}$  it may happen that  $\pi_s$  becomes negative. If  $\gamma_s = 0$  (risk neutrality) and  $\rho_{q_s, W} = 0$ , the risk premium is also zero. Note that the indifference price is independent of the initial wealth.

Carrying out quite similar steps for the buyer of the derivative results in optimal investment shares for his or her production activity, without and with the weather insurance:

$$\alpha_b^{*without} = \frac{E(q_b) - q_f}{\gamma_b \cdot \sigma_{q_b}^2}. \quad (26)$$

and

$$\alpha_b^{*with} = \frac{E(q_b) - q_f - \gamma_b \cdot k \cdot COV(q_b, W)}{\gamma_b \cdot \sigma_{q_b}^2}. \quad (27)$$

Herein are  $E(q_b)$  and  $\sigma_{q_b}^2$  the expected value and the variance of the return on production  $q_b$ , while  $COV(q_b, W)$  is the covariance between  $q_b$  and the derivative's payoff. In contrast to the seller, the buyer invests more in the risky production activity if the covariance between the production revenues and the indemnity payments is negative. Using these results we can derive an indifference price for the buyer analogous to (24):

$$F_b = \frac{1}{q_f} (E(W) + \pi_b), \quad (28)$$

with

$$\pi_b = \frac{1}{2} \cdot \gamma_b \cdot k \cdot \sigma_W^2 \cdot (\rho_{q_b, W}^2 - 1) - \frac{\sigma_W}{\sigma_{q_b}} \cdot (E(q_b) - q_f) \cdot \rho_{q_b, W}. \quad (29)$$

The indifference price equation for the buyer has the same structure as for the seller. Again, the risk premium  $\pi_b$  can be negative or positive. While the first summand on the right side of (29) is always negative, the second is positive, if one reasonably assumes that  $E(q_b) - q_f > 0$  and the correlation  $\rho_{q_b, W} < 0$ .<sup>7</sup> Hence the sign of the risk premium depends on the specific parameter values. For example, in the case of a highly risk averse decision maker, a rather small (negative) correlation between yields and payoffs and small expected returns on production, the risk premium will be negative. In other words, the producer will offer less than the expected value of the payoff to buy the weather insurance.

When do we observe trading of weather insurance between the seller and the buyer in the outlined model framework? The following proposition states a necessary condition.

PROPOSITION 1 *Trading of weather insurance will only arise if*

$$-\frac{(E(q_b) - q_f) \cdot \rho_{q_b, W}}{\sigma_{q_b}} > -\frac{(E(q_s) - q_f) \cdot \rho_{q_s, W}}{\sigma_{q_s}}. \quad (30)$$

*Proof:* Trading requires that  $F_b(k) > F_s(k)$ , which implies, in view of (28) and (24), that  $\pi_b > \pi_s$ , i.e.,

$$\begin{aligned} \pi_b &= \frac{1}{2} \cdot \gamma_b \cdot k \cdot \sigma_W^2 \cdot (\rho_{q_b, W}^2 - 1) - \frac{\sigma_W}{\sigma_{q_b}} \cdot (E(q_b) - q_f) \cdot \rho_{q_b, W} > \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot \gamma_s \cdot k \cdot \sigma_W^2 \cdot (\rho_{q_s, W}^2 - 1) - \frac{\sigma_W}{\sigma_{q_s}} \cdot (E(q_s) - q_f) \cdot \rho_{q_s, W} = \pi_s. \end{aligned} \quad (31)$$

Obviously  $\pi_b$  and  $\pi_s$  are both linear in  $k$ , but with opposite slope ( $\partial \pi_b / \partial k < 0, \partial \pi_s / \partial k > 0$ ). Hence  $F_b(k)$  and  $F_s(k)$  can only intersect if the second term on the left side of the inequality (31) exceeds the second term on the right side. q.e.d.

The optimization problem that underlies the indifference price implies that the buyer can adjust the optimal production level. One may argue that this is unrealistic in agriculture. The level of agricultural production is usually determined among other things by the factor endowment of the farm and crop rotation requirements. That means  $\alpha_b$  is chosen prior to the hedging decision and does not depend on the availability of weather insurance. If  $\alpha_b$ , the

---

<sup>7</sup> Otherwise hedging of production risk would not be possible at all.

amount of investment into the agricultural production, is treated as an exogenous parameter and not as a decision variable, the risk premium of the buyer simplifies to

$$\tilde{\pi}_b = -\frac{1}{2} \cdot \gamma_b \cdot k \cdot \sigma_W^2 - \gamma_b \cdot \alpha_b \cdot \sigma_{q_b} \cdot \sigma_W \cdot \rho_{q_b, W} . \quad (32)$$

In the subsequent application we use the definition of the risk premium given in (32) instead of the one in (29).

#### 4 Empirical Application: The demand of German grain producers for weather insurance

Grain production in northeast Germany, Brandenburg in particular, is highly affected by weather risk. During the relevant growth period of April to June, the sum of average rainfall in Brandenburg varied over the last 60 years between 64 and 258 mm. Actually, drought is the major cause for bad grain harvests. The correlation between rainfall and yields results from the sandy soil, possessing little water-storing capacity, as well as the lack of irrigation. Currently there exists no opportunity for insuring against yield losses caused by rainfall or temperature. In view of a series of extreme crop failures in the drought years 2000, 2003 and 2006, where only governmental disaster relief prevented farmers from becoming insolvent, there is a pronounced interest in introducing some kind of weather insurance. In the subsequent application we calculate the willingness to pay for such insurance by means of indifference pricing. This information is valuable for a potential seller who contemplates entering this market segment. Since designing an insurance contract is costly, only a few different contracts will be offered. To keep things as easy as possible we will consider a single weather derivative. The specification of this derivative is chosen in such a way that it addresses the demand of a specific wheat producer in Brandenburg in the best possible manner, i.e., maximizes the hedging effectiveness. The demand for this insurance from other farms and from other regions in Germany (Saxony, Thuringia and Baden-Wuerttemberg) is also assessed, though we expect less willingness to pay for such a contract than compared with a wheat producer in Brandenburg.

For the specification of the relationship between weather and yield  $Y_t$ , we follow Vedenov and Barnett (2004) who suggest a model that is quadratic in deviations of temperature and rainfall. Significant parameter estimates are attained for the following model:

$$Y_t = I_t + \varepsilon_t , \quad (33)$$

with



$$I_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot \Delta T_t^{June} + \beta_2 \cdot (\Delta T_t^{April})^2 + \beta_3 \cdot (\Delta R_t)^2 + \beta_4 \cdot \Delta R_t \cdot \Delta T_t^{April} + \beta_5 \cdot \Delta R_t \cdot \Delta T_t^{June} \quad (34)$$

Here  $I_t$  denotes a weather index at time  $t = 1, \dots, N$ ,  $\varepsilon_t \sim N[0, \sigma_\varepsilon]$  is a normally distributed error term and  $\Delta$  measures the deviation of a weather variable from its long-time average.  $T_t^{April}$  and  $T_t^{June}$  are the average monthly temperatures of April and June.  $R_t$  represents the cumulated rainfall in the period April 1 until June 30, which is relevant to grain growth in Germany. Note that the yield is linear in the weather index but nonlinear in the basic weather variables “rainfall” and “temperature.” Though the index defined in (34) may not be transparent to all market participants, we prefer to use it since it makes it possible to work with only one weather derivative. Alternatively, one could resort to the basic weather variables (rainfall and temperature) as underlying, but then more complicated hedging strategies such as strangles or straddles are necessary to cope with nonlinearities.

Ordinary least square estimation of the parameters  $\beta_0$  to  $\beta_5$  in (34) is based on wheat yield data from a representative cash crop farm in Brandenburg for a time period between 1993 and 2007.<sup>8</sup> The weather variables are derived from daily temperature and daily precipitation data, recorded at the weather station in Berlin-Tempelhof. The parameter estimates and diagnostics of the regression are summarized in table 1. An  $R^2$  of 0.85 indicates that the selected weather index can powerfully explain the wheat yield in Brandenburg. The model specification is also supported by the corrected Akaike information criterion (AICc).

**Table 1. Estimated Production Function for Wheat in Brandenburg, Germany**

Variable	Parameter	Estimate	p-value
constant	$\beta_0$	65.7256	0.0000
$\Delta T_t^{June}$	$\beta_1$	-3.9715	0.0176
$(\Delta T_t^{April})^2$	$\beta_2$	-3.0932	0.0134
$(\Delta R_t)^2$	$\beta_3$	0.0017	0.0039
$\Delta R_t \cdot \Delta T_t^{April}$	$\beta_4$	-0.1375	0.0052
$\Delta R_t \cdot \Delta T_t^{June}$	$\beta_5$	0.1414	0.0023
$R^2$		0.85	
F-value		10.09	
AICc		5.92	
Durbin-Watson		2.25	

<sup>8</sup> Variable cost and capital endowment per hectare are state-wide average values, while the yield data come from an existing individual farm in Brandenburg. Regional yield data show in general a smaller variability than individual yields and, hence, underestimate the farm's risk exposure. Unfortunately, reliable yield data for the New Federal States are not available for the era before the German reunification. The limited data base should be kept in mind when interpreting the results of our regression.

However, this model, which was calibrated for Brandenburg and fed with the weather data from Berlin, fits poorly with the wheat yield in other regions or with the yield of other crops (see the first column in table 2). This is not surprising, since different crops have particular growth patterns. Moreover, the results are in accordance with the spatial de-correlation of weather variables that have been reported in other studies (Odening, Musshoff and Xu 2007).

**Table 2. Correlation between Revenue and Indemnity Payments for Different Regions and Products**

			1	2	3	4
Region	Distance* (km)	Product	$R^2$	$p$ (€/dt)	$\sigma_{q_b}$	$\rho_{q_b, W}$
1 Brandenburg	39	wheat	0.85	11.22	0.0354	-0.80
2 Saxony	109		0.71		0.0317	-0.82
3 Thuringia	237		0.23		0.0165	-0.39
4 Baden-Wuerttemberg	537		0.07		0.0173	0.08
5 Brandenburg	39	rye	0.26	11.11	0.0274	-0.56
6 Brandenburg		crop rotation**	0.43	12.75	0.0263	-0.61

\* Distance between reference weather station and farm location.

\*\* 25% wheat, 25% barley, 25% rye and 25% canola.

Based on this information one can design a weather derivative that maximizes the hedging effectiveness for a specific target group, in this case a wheat producer in Brandenburg. The derivative type that we choose is a put-option with payoff  $W_T$  at the expiration date  $T$ :

$$W_T = \max(0, K - I_T) \cdot L. \quad (35)$$

$I_T$  denotes the weather index at expiration,  $K$  the strike-level and  $L$  the tick-size. The tick-size  $L$  is determined such that the negative correlation between the payoff of the option and the revenues of the wheat production is maximal. This is achieved if  $L$  equals the slope of the revenue function for wheat production multiplied by the acreage. For reasons of simplicity it is assumed that the wheat price  $p$  is constant (fixed by forward contracts) and amounts to 11.22 €/dt (Germany, Federal Ministry of Food, Agricultural and Consumer Protection 2006, p. 19). Assuming a farm size of 100 hectares,  $L$  amounts to 1122 € per index point. As usual the strike-level  $K$  equals the long-term average of the weather index (62.58 index points). The option expires after  $T=1$  year. The last column in table 2 displays the correlation between the production return and the payoff of the put option. Using empirical data, we are able to determine the expected value  $E(W)$  and the standard deviation  $\sigma_W$  of the empirical payoffs of the weather contract  $W$ . They are 4557 € and 8018 €, respectively.

Further model assumptions concern the risk aversion parameter, the return of investments on capital markets and the empirical payoff of the derivative. Following Monoyios (2004, p. 251) we set the absolute risk aversion parameters for sellers  $\gamma_s$  to  $1 \cdot 10^{-6}$ . The buyer of the option

is assumed to have a relative risk aversion parameter of 3, which is considered moderate (Pratt 1964). Dividing this by the average equity capital endowment of cash crop farms in Brandenburg (3764 €/ha times 100 ha) yields an absolute risk aversion parameter  $\gamma_b$  of  $8 \cdot 10^{-6}$ . The German Stock Index (DAX) approximates risky capital market investments.<sup>9</sup> Expected value and volatility of the annual log-returns  $r_s$  are calculated using index quotations on the last trading day in June between 1961 and 2007.  $E(r_s)$  amounts to 0.05 and  $\sigma_{q_s}$  to 0.22. The share of capital invested in agricultural production  $\alpha_b$  equals the average capital endowment (€ 3764) times the assumed farm size (100 hectares). The annual production returns  $r_b$  are defined as the ratio of gross margins and capital endowment. Their mean and standard deviations are 0.06 and 0.04, respectively. Further parameters needed as input for equation (25) and (32) are  $\rho_{q_s, W}$  and  $\rho_{q_b, W}$ , which amounts to -0.40 and -0.80, and the risk-free interest rate  $r_f$ , which is assumed to be 3.12% (four year average of the return on German state bonds). The specification of the option and the parameters used for the indifference pricing are summarized in table 3.

**Table 3. Option Specification and Parameters for Indifference Pricing**

	Buyer (Brandenburg)	Seller
Tick-size $L$	1122 €/index point	
Strike-level $K$	62.58 index points	
Maturity of the option $T$	1 year	
Expected payoff of the weather derivative $E(W)$	4557 €	
Volatility $\sigma_W$	8018 €	
Risk-free interest rate $r_f$	3.12%	
Risky investment capital $\alpha_b$ and $\alpha_s$	376400 €	endogenous
Expected return on risky investment $E(r_b)$ and $E(r_s)$	0.06	0.05
Volatility $\sigma_{q_b}$ and $\sigma_{q_s}$	0.04	0.22
Correlation $\rho_{q_b, W}$ and $\rho_{q_s, W}$	-0.80	-0.40
Absolute risk aversion parameter $\gamma_b$ and $\gamma_s$	$8 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$

## 5 Results

The presentation of the results takes place in three steps. First we present indifference prices for wheat producers in Brandenburg and compare them with other pricing methods. Thereafter we relax some of the simplifying model assumptions and carry out a sensitivity analysis.

<sup>9</sup> The choice of the DAX is somehow arbitrary and simply motivated by our particular application. Other stock indexes could as well serve as a proxy for capital market investments.

Finally we ask for the willingness to pay for weather insurance in other regions and for other farm types.

### 5.1 Indifference price of wheat producers in Brandenburg

Based on the aforementioned data and assumptions, the indifference price of the seller and of the potential buyer for the put option are determined according to equations (24) and (32). Figure 1 shows the seller's willingness to accept as well as the Brandenburg producer's willingness to pay as a function of the contract volume  $k$ . Figure 1 also displays the actuarially fair price, as a benchmark. The fair price was calculated by a simple burn analysis, i.e., it equals the average hypothetical payoff of the derivative  $E(W)$ , discounted by the risk-free interest rate  $r_f$  (cf. Jewson and Brix 2005). It amounts to 4419 € and is independent of the contract volume.

The wheat producer's willingness to pay in Brandenburg is, below a contract size of  $k = 2.66$ , greater than the actuarially fair price. This is due to the pronounced negative correlation between  $q_b$  and  $W$ . However, the indifference price decreases with increasing contract volume, because the payoff of the weather contract is uncertain in itself. This effect eventually overrides the first term of (32) so that the risk premium becomes negative for  $k > 2.66$ .

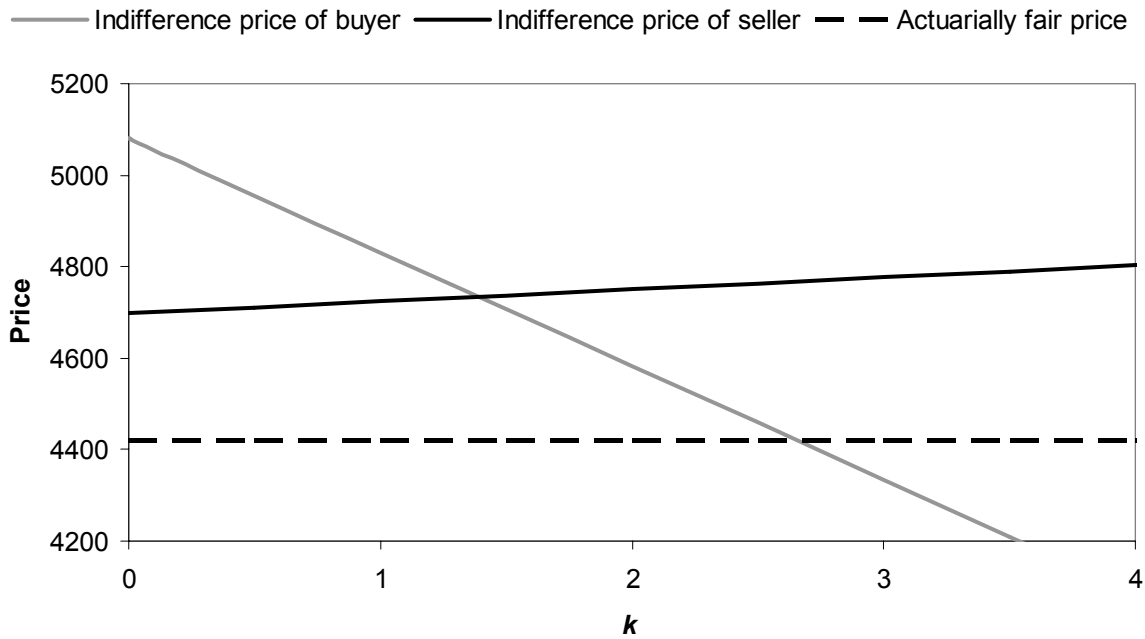
The ask price of the seller is higher than the actuarially fair price for any  $k$  and increases with increasing contract volume. The positive risk premium reflects the negative correlation between  $q_s$  and  $W$  and the excess return of risky capital market investments ( $r_s > r_f$ ).

At first glance, the indifference price functions look like supply and demand functions, but there is a conceptual difference. By construction the utility of the buyer (or seller) is constant along the indifference price curve, i.e., the graphs for the indifference price in figure 1 can be interpreted as iso-utility lines.<sup>10</sup> Hence the intersection of the buyer and seller price should not be misunderstood as a unique equilibrium price. In the case of Brandenburg's wheat producers, figure 1 simply says that the willingness to pay is above the seller's minimum price below a contract volume of  $k = 1.28$  and, hence, a trading potential for the weather derivative is present. The triangle left of the intersection shows some similarity with an Edgeworth lens. Within this area both agents are better off compared with their initial situation if they exchange weather risk at a price between  $F_s(k)$  and  $F_b(k)$ . However, the final contract volume and the contract price cannot be unambiguously determined. At this point one should recall that the indifference price for the seller constitutes a lower bound for the true ask price. In a more realistic setting the transaction costs for developing and launching the weather derivative also have to be taken into account. Some of these transaction costs are typically fixed, so that economies of scale will occur. Thus trading of the weather derivative seems more likely

<sup>10</sup> This can be easily seen from the fact that (i) the certainty equivalent in eq.(20) is constant and (ii) the indifference price is derived from equating (20) and (21).

if the two indifference curves intersect at a high contract volume. Respecting the specific assumptions of our example, it turns out that if the seller used a burn analysis instead of indifference pricing, he would underestimate the willingness to pay, at least regarding small contract volumes and would probably be discouraged from offering the weather contract.

**Figure 1. Indifference prices of sellers and wheat producers in Brandenburg and actuarially fair price (in €)**



In order to relate our results to other pricing methods, we additionally calculate the standard Black-Scholes price and a modified Black-Scholes price suggested by Turvey (2005). Black-Scholes pricing implies a geometric Brownian motion (GBM) for the stochastic underlying. Here, the parameters of the GBM are determined from the empirical log returns of the weather index. The volatility  $\hat{\sigma}$  amounts to 0.297 and is used for both variants. The estimated empirical drift rate  $\hat{\mu}$  of 0.0096 enters the modified Black-Scholes formula without a correction for the market price of risk, whereas the risk-free interest rate is used as a drift rate for the standard Black-Scholes pricing formula. The former implies a market price of weather risk equal to zero, and the latter assumes the existence of a risk-less hedge. The initial value of the geometric Brownian motion is chosen so that the expected value of the stochastic process at maturity, i.e., at time  $T$ , equals the mean of the empirical distribution of the weather index (62.58 index points). With these parameters, the resulting standard Black-Scholes price amounts to 7143, which is considerably higher than the indifference price and the actuarially fair price. The modified Black-Scholes price of 7766 is even 9% higher than the standard

Black-Scholes price.<sup>11</sup> It is important to note that the observed deviations between the Black Scholes prices and the indifference price are caused by the different statistical concepts underlying this particular application, and they should not be regarded as an inherent difference in the pricing approaches. As explained above, the calculation of the indifference prices is based here on a static (empirical) distribution of the weather index which is the common actuarial perspective on risk. In contrast, financial pricing typically assumes a stochastic process which implies a dynamic evolvement of the weather risk. The aforementioned specification of the geometric Brownian motion implies that the weather index  $I$  at time  $T = 1$  is lognormally distributed with a variance (Dixit and Pindyck 1994, p. 72)

$$\sigma_{I_T}^2 = I_0^2 \cdot e^{2\hat{\mu} \cdot T} \cdot (e^{\hat{\sigma}^2 \cdot T} - 1). \quad (36)$$

Inserting the aforementioned parameters yields a variance  $\sigma_{I_T}^2$  of 19.20 which is twice as high as the variance of the empirical distribution of 10.54. Adjusting the volatility  $\sigma_{I_T}$  so that the variance of the geometric Brownian motion at maturity coincides with the empirical variance results in a standard Black-Scholes price of € 4203 which is much closer to the indifference price and the actuarially fair price.

## 5.2 Sensitivity analysis

The indifference prices presented so far were calculated by means of the explicit expressions given in equations (24) and (32). However, these expressions were derived in a simple mean-variance-framework which in general is inconsistent with expected utility maximization. Therefore, it is interesting to question the robustness of our results with regard to the utility function of the agents and the probability distributions of the weather index and the production returns. Since no closed form solution exists, indifference prices are directly derived from eq. (16) by numerical techniques. Expected utilities are calculated with Monte-Carlo simulation (10000 repetitions) and the value of  $F$ , which equates the left and the right hand side of eq. (16), is determined by using Newton's method.

In the first part of the sensitivity analysis, we vary the risk aversion and the type of the utility function. A flexible form is the exponential power utility function (EPU, Saha 1993):

$$u(X) = -e^{-\gamma \cdot X^\nu}. \quad (37)$$

Common parameter restrictions are  $\nu \neq 0$  and  $\gamma \neq 0$ . In the case of  $\nu = 1$ , eq. (37) coincides with the exponential utility function (18). While the exponential utility function assumes constant absolute risk aversion (CARA), the exponential power utility function can also ex-

---

<sup>11</sup> This is theoretically consistent since a put option is characterized by a negative 'rho', i.e., the put price decreases with an increasing drift rate (cf. Hull 2006, p. 362).

hibit decreasing absolute risk aversion (DARA) if  $0 < \nu < 1$  and  $\gamma > 0$  as well as increasing absolute risk aversion (IARA) if  $\nu > 1$  and  $\gamma > 0$ .

The upper part of table 4 depicts the risk premia for buyers with different degrees of (relative and absolute) risk aversion assuming CARA preferences. The first row reflects the base case ( $\gamma_b = 8 \cdot 10^{-6}$ ), and the next two rows correspond to a 20% decrease (increase) of the absolute risk aversion. Obviously, the bid price curve becomes flatter and shifts downward if  $\gamma_b$  decreases. That means that the market potential erodes with the farmer's diminishing risk aversion and that the difference between the fair price and the indifference price vanishes. Furthermore, table 4 compares CARA, DARA, and IARA preferences through a variation of  $\nu$ , while keeping the relative risk aversion constant. This variation has only a small impact on the size of risk premia. Note that the relationship between the indifference price and the contract volume is no longer linear if DARA or IARA preferences are assumed. However, the linear relationship implied by the analytical method can be regarded as a fair approximation.

**Table 4. Risk Premia of Buyers with Different Risk Preferences\***

Type of risk-preference	Relative risk aversion	Parameters of EPU		Contract size			
		$\nu$	$\gamma$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
CARA	3.0	1	$8.0 \cdot 10^{-6}$	412 (0.0)	164 (0.0)	-85 (0.0)	-333 (0.0)
	2.4	1	$6.4 \cdot 10^{-6}$	330 (-1.7)	131 (-0.7)	-68 (0.4)	-267 (1.6)
	3.6	1	$9.6 \cdot 10^{-6}$	495 (1.7)	196 (0.7)	-102 (-0.4)	-400 (-1.6)
DARA	3.0	1/5	$8.4 \cdot 10^{-1}$	383 (-0.6)	152 (-0.3)	-80 (0.1)	-312 (0.5)
	3.0	1/3	$9.7 \cdot 10^{-2}$	383 (-0.6)	156 (-0.2)	-81 (0.1)	-313 (0.5)
IARA	3.0	2	$1.4 \cdot 10^{-13}$	452 (0.8)	185 (0.5)	-82 (0.1)	-348 (-0.4)

\* Values in parenthesis depict the difference (in %) of the numerical and the analytical solution of the indifference price.

Next, we analyze the sensitivity of the results with respect to the distributions of the weather index and the production returns while falling back on the assumption of an exponential utility function. Applying standard goodness-of-fit tests, we find that the normal distribution, the logistic distribution, and the beta distribution are reasonable candidates for the distribution of the weather index, whereas the beta distribution, the normal distribution, and the gamma distribution fit the empirical observations of production returns well. The results in table 5 show that indifference pricing is also sensitive to the distributional assumptions, which is not

too surprising. In a range from  $k = 1$  to  $k = 4$ , the deviation from the analytical solution varies between -2.1 and 10.2%, depending on the type of the distribution and the contract volume.<sup>12</sup> Again, the relationship between indifference price and contract volume becomes non-linear under these scenarios.

**Table 5. Risk Premia for Different Probability Distributions\***

Type of distribution for		Contract size			
Weather index	Production returns	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
Normal	Beta	537 (2.6)	350 (4.0)	172 (5.8)	5 (8.0)
Logistic	Beta	310 (-2.1)	118 (-1.0)	-59 (0.6)	-225 (2.6)
Beta	Beta	644 (4.7)	455 (6.2)	276 (8.0)	107 (10.2)
Normal	Normal	531 (2.4)	343 (3.8)	165 (5.6)	-3 (7.8)
Normal	Gamma	497 (1.7)	311 (3.1)	135 (4.9)	-30 (7.1)

\* Values in parenthesis depict the difference (in %) of the numerical and the analytical solution of the indifference price.

Moreover, the willingness to pay for weather insurance in our model depends on  $\alpha_b$ , the farm size. From equation (32) it can be seen that, keeping all other parameters constant, a variation of the farm size leads to a parallel shift of the buyer's indifference price curve, which means that larger farms have a considerably higher bid price than smaller farms. However, if we fall back on the more plausible assumption that the relative rather than the absolute risk aversion is constant, the impact of a change of farm size will be mitigated by an opposite change in  $\gamma_b$ .

### 5.3 Indifference price of wheat producers in other regions and for different farm types

Figure 2 depicts the indifference price of wheat producers in other regions in Germany, keeping the specification of the option constant. Compared to wheat producers in Brandenburg, the willingness to pay is lower in Saxony, Thuringia and Baden-Wuerttemberg. For the latter two states there is, in fact, no trading potential. This result can be explained by the higher geographical basis risk, i.e., lower hedging effectiveness, and the fact that production risk is lower than in Brandenburg. The slope of the buyer's price curve is unaffected, since it depends only on the risk aversion and on the volatility of the option payoff (cf. equation (32)).

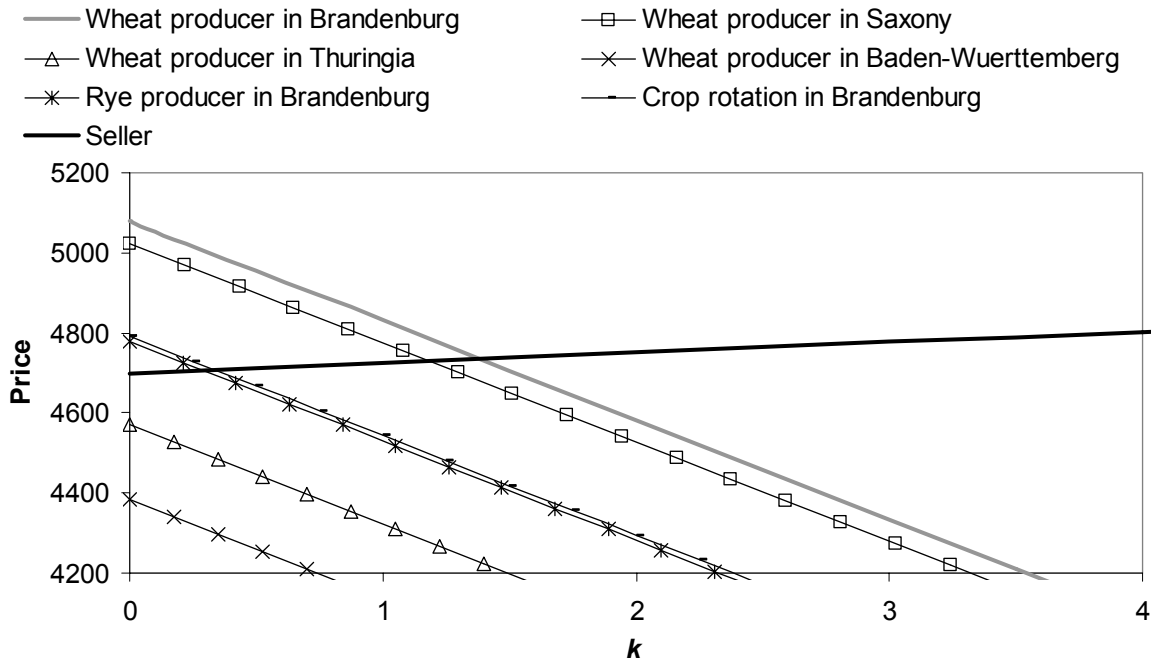
Finally, figure 2 shows the willingness to pay of different farm types in Brandenburg, keeping all other model assumptions constant. As before, we observe a parallel shift of the indifference price functions. The explanation is analogous to the regional comparison. The compara-

<sup>12</sup> It might be surprising that assuming a normal distribution for the weather index as well as for the production returns does not exactly replicate the analytical solution. However, the normality assumption implied by the analytical solution is related to the terminal wealth.



tively low indifference price functions for rye and for the crop rotation can be traced back to (i) the smaller correlation between production returns and indemnity payments,  $\rho_{q_b, W}$ , and (ii) a lower volatility of returns  $\sigma_{q_b}$  (cf. table 2). All in all, the results in figure 2 highlight that the willingness to pay for index-based weather insurance is very specific to the production program and to the location of the farm.

**Figure 2. Indifference prices for different regions and farm types in €**



## 6 Conclusions

Dischel (2002, p. 20) observes that potential market participants “are watching the weather market’s progress from the sidelines”. In this paper we take up the hypothesis that the lack of transparent pricing may explain why potential market participants hesitate to enter the weather market, and we suggest a rather new pricing approach, namely indifference pricing. On the one hand indifference pricing can be classified into the framework of financial pricing of derivatives, and hence has a strong theoretical basis. On the other hand, under some simplifying assumptions made here, it boils down to a rather plain model that has a straightforward actuarial interpretation. Insofar, indifference pricing bridges the financial and the actuarial approaches for the valuation of non-tradable assets. Our approach has some advantages. First, it circumvents the determination of the market price of risk. Clearly along with this comes the cost of specifying a utility function, but this is unavoidable whenever no-arbitrage arguments are insufficient to determine a unique price. Second, our model seems to be more adequate for an application to OTC markets than equilibrium pricing models. It takes into account individ-

ual basis risk and calculates its impact on the willingness to pay for a weather contract. We also find it more convenient to work with distributions of the relevant random variable, rather than to specify stochastic processes in a continuous time framework. Compared with other approaches, indifference pricing is less ambitious since it does not attempt to predict a transacted market price. Instead it calculates price boundaries for sellers and buyers and simply states if transactions are likely to occur or not.

The model that we developed is rather stylized and might be refined. For example, the consideration of portfolio effects in the decision-making process of farmers and derivative writers should be enhanced. Farms usually have more diversified production programs than assumed here, and they encounter additional risks, in particular price risks. Likewise, sellers may find risks in their portfolios showing a higher correlation with the weather variable than the market portfolio shows.

Our calculations confirm results of previous studies, showing a considerable magnitude of basis risk inherent to index-based weather insurance in the agribusiness sector (e.g., Woodard and Garcia 2007). Geographical basis risk, in conjunction with production related basis risk, erodes the potential advantages of weather derivatives over traditional crop insurance. To overcome this problem, sellers should offer tailored products that match the specific demand of individual producers. However, apart from data issues, this is only a realistic scenario if the design of individual insurance contracts does not entail high transaction costs. The proposed indifference pricing approach may facilitate reducing such costs.

## 7 References

- Alaton, P., B. Djehiche, and D. Stillberger. 2002. "On Modeling and Pricing Weather Derivatives." *Applied Mathematical Finance* 9:1–20.
- Becherer, D. 2003. "Rational Hedging and Valuation of Integrated Risks under Constant Absolute Risk Aversion." *Insurance: Mathematics & Economics* 33:1–28.
- Benth, F.E. 2004. *Option Theory with Stochastic Analysis: An Introduction to Mathematical Finance*. Berlin: Springer-Verlag.
- Brockett, P.L., M. Wang, C. Yang, and H. Zou. 2006. "Portfolio Effects and Valuation of Weather Derivatives." *The Financial Review* 41:55–76.
- Cao, M., and J. Wei. 2004. "Weather Derivatives Valuation and Market Price of Weather Risk." *Journal of Futures Markets* 24:1065–1089.
- Davis, M. 1997. "Option Pricing in Incomplete Markets." In: M.A.H. Dempster, and S.R. Pliska, eds. *Mathematics of Derivative Securities*. Cambridge: Cambridge University Press, pp. 227–254.
- Davis, M. 2001. "Pricing Weather Derivatives by Marginal Value." *Quantitative Finance* 1:305–308.
- Dischel, B. 2002. "Dry Market in Need of Liquidity." *Risk Magazine: Risk Management for Investor*, September, pp. 20–22.

- Dixit, A.K., and R.S. Pindyck. 1994. *Investment under Uncertainty*. Princeton: Princeton University Press.
- Duffie, D. 2001. *Dynamic Asset Pricing Theory*, 3rd. ed. Princeton: Princeton University Press.
- Eberlein, E., and J. Jacod. 1997. "On the Range of Options Prices." *Finance and Stochastics* 1:131-140.
- Edwards, M.J., and P. Simmons. 2004. "Preliminary Results for the Measurement of Willingness to Pay for Climate Derivatives." Paper presented at the 48th Annual Conference of the Australian Agricultural and Resource Economics Society, Melbourne, 11-13 February.
- Fleege, T.A., T.J. Richards, M.R. Manfredo, and D.R. Sanders. 2004. "The Performance of Weather Derivatives in Managing Risks of Specialty Crops." Paper presented at the NCR-134 Conference on Applied Commodity Price Analysis, Forecasting, and Market Risk Management, St. Louis, Missouri, 19-20 April.
- Föllmer, H., and A. Schied. 2002. *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time*. Berlin: Walter de Gruyter.
- Frittelli, M. 2000. "The Minimal Entropy Martingale Measure and the Valuation Problem in Incomplete Markets." *Mathematical Finance* 10:39-52.
- Germany, Federal Ministry of Food, Agricultural and Consumer Protection. 2006. *Ernte 2006: Mengen und Preise*. Berlin: German Government. Available at <http://www.bmelv.de/>
- Henderson, V., and D. Hobson. 2007. "Utility Indifference Pricing." In R. Carmona, ed. *Volume on Indifference Pricing*. Princeton: Princeton University Press: in press.
- Hull, J.C. 2006. *Options, Futures & Other Derivatives*, 6th. ed. New Jersey: Prentice Hall International.
- Jensen, B.A., and J.A. Nielsen. 1996. "Pricing by no arbitrage." In D.R. Cox, D.V. Hinkley, and O.E. Barndorff-Nielsen, eds. *Time Series Models in Economics, Finance and Other Fields*. London: Chapman & Hall, pp. 177-225.
- Jewson, S., and A. Brix. 2005. *Weather Derivative Valuation: The Meteorological, Statistical, Financial and Mathematical Foundations*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Karl, T.R., and K.E. Trenberth. 2003. "Modern Global Climate Change." *Science* 302:1719-1723.
- Lucas, R.E. 1978. "Asset Prices in an Exchange Economy". *Econometrica* 46:1429-1445.
- Monoyios, M. 2004. "Performance of Utility-Based Strategies for Hedging Basis Risk." *Quantitative Finance* 4:245-255.
- Monoyios, M. 2007. "The Minimal Entropy Measure and an Esscher Transform in an Incomplete Market Model" *Statistics & Probability Letters* 77(11):1070-1076.
- Musiela, M., and Zariphopoulou, T. 2004. "An Example of Indifference Prices under Exponential Preferences." *Financial and Stochastics* 8:229-239.
- Myers, R.J., Y. Liu, and S. Hanson. 2005. "How should We Value Agricultural Insurance Contracts." Paper prepared at the American Agricultural Economics Association Annual Meeting, Providence, Rhode Island, 24-27 July.
- Neftci, S.N. 1996. *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*. San Diego: Academic Press.
- Odening, M., O. Musshoff, and W. Xu. 2007. "Analysis of Rainfall Derivatives Using Daily Precipitation Models: Opportunities and Pitfalls." *Agricultural Finance Review* 67:135-156.

- Pratt, J.W. 1964. "Risk Aversion in the Small and in the Large." *Econometrica* 32:122-136.
- Richards, T.J., M.R. Manfredo, and D.R. Sanders. 2004. "Pricing Weather Derivatives." *American Journal of Agricultural Economics* 86:1005-1017.
- Saha, A. 1993. "Expo-Power Utility: A 'Flexible' Form for Absolute and Relative Risk Aversion." *American Journal of Agricultural Economics* 75:905-913.
- Skees, J. 2001. "The Potential Role of Weather Markets for U.S. Agriculture." *The Climate Report* 2. Available at <http://www.guaranteedweather.com/>.
- Turvey, C.G. 2005. "The Pricing of Degree-Day Weather Options." *Agricultural Finance Review*, Spring 2005:59-85.
- Varangis, P., J. Skees, and B. Barnett. 2002. "Weather Indexes for Developing Countries." In R. Dischel, ed. *Climate Risk and the Weather Market*. London: Risk Books.
- Vedenov, D.V., and B.J. Barnett. 2004. "Efficiency of Weather Derivatives as Primary Crop Insurance Instruments." *Journal of Agricultural and Resource Economics* 29:387-403.
- Woodard, J.D., and P. Garcia. 2007. "Basis Risk and Weather Hedging Effectiveness." Paper presented at the 101<sup>st</sup> EAAE Seminar 'Management of Climate Risks in Agriculture', Berlin, 05-06 July.

## **V. OPTIMAL DESIGN OF WEATHER BONDS <sup>\*</sup>**

von

Wei Xu<sup>1)</sup>, Martin Odening<sup>1)</sup> and Oliver Mußhoff<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> Humboldt-Universität zu Berlin

Department of Agricultural Economics and Social Science

<sup>2)</sup> Georg-August-Universität Göttingen

Department of Agricultural Economics and Rural Developmen

---

<sup>\*</sup> Accepted as contributed paper at the Annual meeting of the American Agricultural Economics Association (AAEA), Orlando, Florida, July 27-29, 2008.

## Optimal Design of Weather Bonds

### Abstract

This paper investigates the optimal design of weather bonds for reinsurance purposes. The motivation for this task comes from an empirical study showing that German farmers are not willing to pay the premiums for weather insurance that insurers ask for. Since reinsurance costs constitute a major cost component of insurance premiums, minimizing these costs could decrease the observed gap between the willingness to pay and the willingness to accept the cost of the insurance. Against this background, we put forth the proposal to transfer weather risk directly to the capital market by issuing weather bonds. The structure of the weather bond is optimally designed in a utility maximizing framework that involves farmers, insurers, and capital market investors. The approach is illustrated by an example of securitizing draught risk in crop production in Germany.

### Keywords

weather risk, weather bonds, reinsurance, securitisation

## 1 Introduction

Agricultural production is highly exposed to weather risk, and in view of the climate changes, it is likely that extreme weather events will occur more frequently in the future. In that context, the development of weather insurance products plays an important role for farm income stabilization. Actually, the design of weather insurance is a subject of current research in agricultural economics (e.g., TURVEY 2005). While the greater part of the literature on the subject considers the problem from the viewpoint of farmers, we focus in our paper on the supply side, i.e., the insurer. It is well known that weather fluctuations constitute a systemic risk for private insurance companies (MIRANDA and GLAUBER 1997). As a response to systemic risk private insurance companies purchase reinsurance contracts.

However, traditional reinsurance contracts have been criticized as being inefficient. Froot and O'Connell (1996) provide evidence for this statement by reporting price-loss-ratios of 1.6 to 1.7 for catastrophe reinsurance. In this context Doherty (1997) pinpoints two problems that are inherent to traditional reinsurance. First, there is a moral hazard problem since reinsurance makes insurers sloppy in their claim settlement practice. Second, additional transaction cost may arise from default risk of insurance and reinsurance companies. In order to overcome these problems, a direct transfer of weather risks to the capital market via weather bonds or catastrophe (CAT) bonds has been proposed as an alternative reinsurance tool for private insurance companies underwriting crop insurance (SKEES et al. 2007, MAHUL 2001). In brief, the issuer of a weather bond grants an investor an annual return in the form of a coupon and

principal payments in exchange for paying the bond price. In the case of an unfavourable weather event, the issuer retains a certain share of the principal or the coupon as a compensation for his weather related losses. Due to high expected returns and a low correlation with stock market returns, weather bonds may appear attractive to capital market investors. Some applications of CAT bonds and weather bonds do already exist which underpin their potential as risk management tools in agriculture (e.g., VEDENOV et al. 2006, Turvey 2007). However, these products are frequently specified on an ad hoc basis and some theoretical problems still remain unsolved. In particular, the pricing and the optimal design of weather bonds deserve further investigation.

The objective of this paper is to identify the optimal structure of a weather bond from the viewpoint of an insurer. This includes the determination of the bond price, the coupon payments and the contingent coupon reduction. The task is complicated by the fact that the optimal design of the weather bond depends on the risk position of the insurer which, in turn, is affected by offering weather insurance to farmers. Hence the securitization transaction and the insurance transaction have to be analyzed simultaneously.

Our modelling framework is in the spirit of RAVIV (1979) who applies variational calculus for determining the optimal structure of an insurance contract. BARRIEU and EL KAROUI (2002) extend this approach to three agents: a producer, an insurer, and an investor. Formally, their model consists of two interrelated constrained optimization problems, each showing the structure of a principal agent model. The first part, the insurance transaction, addresses the relation between the producer (farmer) and the insurer. The optimal compensation function and the optimal insurance premium are derived by maximizing the expected utility of the producer's terminal wealth under a participation constraint for the insurer. The second part, the securitization transaction, models the relation between the insurer and the investor. Herein, the parameters of the weather bond are determined so that the expected utility for the insurer is maximized under a participation constraint for the investor and for a given optimal insurance contract. We take up this model and generalize it in two directions. First, we include idiosyncratic risks (basis risk) on the part of the producer. This can be achieved by replacing the actual risk exposure of the producer by its conditional certainty equivalent with respect to the common (insured) weather risk.

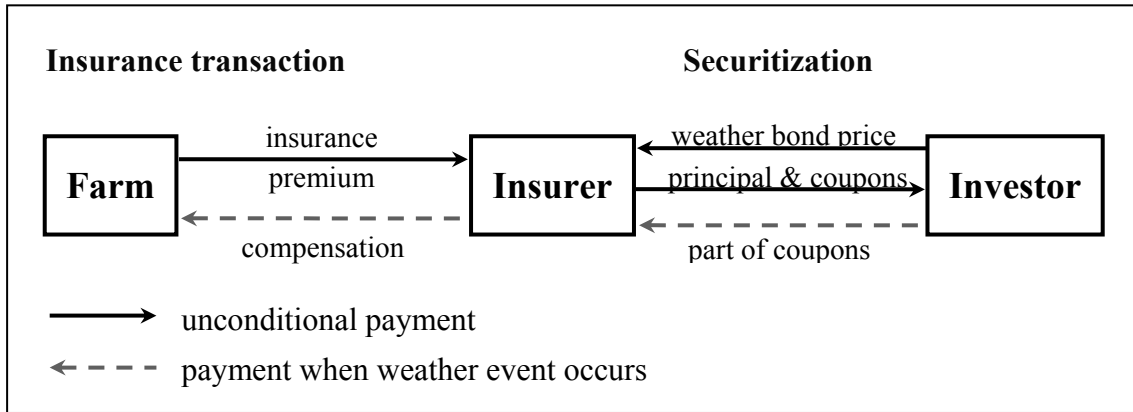
The remainder of the paper is organized as follows: The subsequent section introduces an optimization model that supports the design of weather derivatives as a means to shift weather risk to the capital market. It is followed by an illustrative application of the model. The paper ends with a discussion on the potential of weather derivatives for the securitization of weather related risks.

## 2 Theoretical framework

### 2.1 Statement of the problem

In this section, we will use a modelling framework that was suggested by Barrieu and El Karoui (2002) in the spirit of Raviv (1979). Our model economy consists of three risk averse agents: a farm, an insurer, and an investor (figure 1).

**Figure 1 Description of the transaction structure**



The economic relationship between these actors consists of two transactions: an insurance transaction between the firm and the insurer and a securitization transaction between the insurer and the investor via the weather bond. In the following, we will describe these transactions in more detail. It is assumed in this context that the firm has already decided as to its production. Contingent upon the weather conditions in year  $t$ , the firm suffers production losses  $g(I_t, e_t)$ .  $I$  denotes a well-defined weather index, and  $e_t$  captures other random factors which have an influence on the production loss. The function  $g(\cdot)$  translates the stochastic factors into an actual loss. In a general setting, we consider a multi-period insurance contract where production losses are cumulated over a time period of  $n$  years resulting in a total loss  $\Theta_h$ , where

$$\Theta_h = \sum_{t=1}^n \beta_{n-t} \cdot g(I_t, e_t) \quad (1)$$

Herein,  $\beta_{n-t} = e^{r \cdot (n-t)}$  represents an accumulation factor with a riskless discount rate  $r$ . In order to cover at least part of the losses, the producer buys an index based insurance for a price  $\pi$  and receives in exchange an indemnity payment  $J(\Theta)$ ,  $0 \leq J(\Theta) \leq \Theta$ . The insured loss  $\Theta$  is defined as

$$\Theta = \sum_{t=1}^n \beta_{n-t} \cdot f(I_t) \quad (2)$$



The function  $f(\cdot)$  translates the weather index into an insured loss. This specification is very flexible and comprises, for example, options-like insurance contracts which pay an indemnity if a predetermined strike level for the weather index is exceeded. Note that the indemnity payment solely depends on the weather index and not on other stochastic factors  $e_t$ . Hence  $\Theta$  and  $\Theta_h$  differ in general. This discrepancy causes a basis risk for the firm. To keep the exposition as simple as possible at the beginning, we subsequently assume that no basis risk is present, i.e.  $\Theta = \Theta_h$ . (This assumption is relaxed later on.) The values of the cash flows in period  $n$  resulting from this transaction are for the producer and the insurer, respectively:

$$-\pi \cdot \beta_n - \Theta + J(\Theta) \quad (3)$$

and

$$\pi \cdot \beta_n - J(\Theta) \quad (4)$$

At the same time, the insurer issues a weather bond at price  $\Phi$ . An investor who pays the price  $\Phi$  receives the principal  $N$  in year  $n$  and coupon payments  $s$  in each year  $t$ . However, the investor has to pay back a certain portion  $\alpha$ . Thereby, part of the loss risk that the insurer bears is transferred to the investor. The value of the cash flows associated with this transaction from the viewpoint of the investor is

$$-\Phi \cdot \beta_n + s \cdot \sum_{t=1}^n \beta_{n-t} + N - \alpha(\Theta) \quad (5)$$

The portfolio of the insurer is now

$$\pi \cdot \beta_n - J(\Theta) + \Phi \cdot \beta_n - s \cdot \sum_{t=1}^n \beta_{n-t} - N + \alpha(\Theta) \quad (6)$$

Some simplifying assumptions underlie this modelling framework. First, we consider only the financial flows that are triggered by the insurance contract and the weather bond. This means that other stochastic or non-stochastic portfolio components of the three respective agents and possible diversification effects are neglected. Moreover, we suppose that no transaction costs occur. Finally it is assumed that there is no liquid secondary market for the insurance contract and the weather bond. Hence, it is not possible for the investor to build a replicating strategy. As a result, we cannot apply a risk-neutral pricing approach. Instead, the problem of pricing and designing the optimal insurance contract and the weather bond is solved in a utility maximization framework.

## 2.2 The optimization model and its solution

From the previous description of the two transactions, it is clear that the insurer plays a double role: it offers the insurance contract and issues the weather bond. Both transactions are

interdependent since the insurance contract influences the risk exposure of the insurer and, thus, the willingness to accept the weather bond. This relationship is taken into account by a two step procedure. First, the insurer determines the optimal structure of the weather insurance for the firm. Afterwards, the insurer specifies the parameters of the weather bond, conditional on the knowledge of the design of the insurance contract. The objective of all agents is to maximize the expected utility of their terminal wealth. We follow Barrieu and El Karoui (2002) and assume that the risk preference of the agents is captured by exponential utility functions

$$U(x) = -e^{-\gamma_i \cdot x}, \quad i = F, B, I \quad (7)$$

where  $\gamma_F$ ,  $\gamma_B$  and  $\gamma_I$  denote the risk aversion parameters of the farm, the insurer, and the investor, respectively and  $x$  is stochastic wealth.

In the first part of the transaction (the insurance transaction), it is assumed that the insurer is passive. That means the insurance contract is designed such that the expected utility of the farm is maximized while at the same time the insurer's participation is constrained. The design parameters of the insurance contract are the compensation function  $J(\cdot)$  and the insurance premium  $\pi$ . The optimization problem can be formally stated as:

$$\begin{aligned} \max_{\pi, J} & E[-\exp(-\gamma_F(-\pi \cdot \beta_n - \Theta + J(\Theta)))] \\ \text{s.t.} & \\ E[-\exp(-\gamma_B(\pi \cdot \beta_n - J(\Theta)))] & \geq E[-\exp(-\gamma_B(0))] = -1 \end{aligned} \quad (8a)$$

and

$$\begin{aligned} 0 & \leq J(\Theta) \leq \Theta \\ \text{s.t.} & \\ E[-\exp(-\gamma_B(\pi \cdot \beta_n - J(\Theta)))] & \geq E[-\exp(-\gamma_B(0))] = -1 \end{aligned} \quad (8b)$$

and

$$0 \leq J(\Theta) \leq \Theta \quad (8c)$$

(8a) to (8c) constitutes an optimal control problem that can be solved with standard variational calculus techniques. For a detailed derivation of the subsequent results we refer the reader to Barrieu and El Karoui (2002) and Raviv (1979). The Hamiltonian for this problem is

$$H = -\exp(-\gamma_F(-\pi \cdot \beta_n - \theta + J(\theta))) - \lambda \cdot \exp(-\gamma_B(\pi \cdot \beta_n - J(\theta))) \quad (9)$$

where  $H$  denotes the Hamiltonian function and  $\lambda$  is a time-invariant co-state (a Lagrange multiplier). Three necessary conditions for an optimal solution to (8) arise from differentiating (9) with respect to  $J(\Theta)$ :

$$\frac{\partial H}{\partial J} = \gamma_F \exp(-\gamma_F(J^*(\theta) - \theta - \pi^* \beta_n)) - \lambda \gamma_B \exp(-\gamma_B(\pi^* \beta_n - J^*(\theta))) = 0 \text{ for } \quad (10a)$$

$$0 < J^*(\theta) < \theta$$

$$\frac{\partial H}{\partial J} = \gamma_F \exp(\gamma_F(\theta + \pi^* \beta_n)) - \lambda \gamma_B \exp(-\gamma_B(\pi^* \beta_n)) \leq 0 \text{ for } J^*(\theta) = 0 \quad (10b)$$

$$\frac{\partial H}{\partial J} = \gamma_F \exp(\gamma_F(\pi^* \beta_n)) - \lambda \gamma_B \exp(-\gamma_B(\pi^* \beta_n - \theta)) \geq 0 \text{ for } J^*(\theta) = \theta \quad (10c)$$

Herein  $\theta$  denotes a realization of the stochastic loss  $\Theta$ . It is possible to confine the analysis to the first FOC if one determines two thresholds  $\theta^+$  and  $\theta^-$ .  $\theta^- \geq 0$  can be understood as a deductible. If the damage  $\theta < \theta^-$  the optimal compensation is  $J^*(\theta) = 0$ .  $\theta^+ \geq 0$  can be interpreted as an upper limit for a full compensation, i.e.  $J^*(\theta) = \theta$  is valid only as long as  $\theta < \theta^+$ . With these thresholds at hand the optimal coverage between the two extremes  $J^*(\theta) = 0$  and  $J^*(\theta) = \theta$  can then be derived from (10a). Differentiating (10a) with respect to  $\theta$ , substituting  $\lambda$  from (10a) and solving for  $\frac{\partial J^*}{\partial \theta}$  yields:

$$\frac{\partial J^*}{\partial \theta} = \frac{\gamma_F}{\gamma_B + \gamma_F}. \quad (11)$$

A solution of this differential equation with a boundary condition  $J^*(0) = 0$  is

$$J^*(\theta) = \frac{\gamma_F}{\gamma_B + \gamma_F} \cdot \theta \quad (12)$$

Barrieu and El Karoui (2002) show that under the specified assumptions  $\theta^- = \theta^+ = 0$ . That means the optimal compensation function has no deductible and no upper limit and hence (9) constitutes the optimal compensation function for the whole range of possible losses. (12) can be interpreted as a sharing rule for the realized loss  $\theta$ . Obviously, the optimal compensation depends on the relation of the risk aversion of the farmer and the insurer.

For the derivation of the optimal insurance premium  $\pi$ , we insert (12) into the constraint (8b) and realize that this constraint is binding at the optimum. Solving for  $\pi$  yields

$$\pi^* = \frac{1}{\beta_n} \cdot \frac{1}{\gamma_B} \cdot \ln E \left[ \exp \left( \gamma_B \cdot \frac{\gamma_F}{\gamma_B + \gamma_F} \cdot \Theta \right) \right] \quad (13)$$

Note that the pricing rule (13) differs from the actuarial fair price. Due to the concavity of the utility function, the insurance premium exceeds the discounted expected indemnity payments.

That means a positive risk premium is included in  $\pi$ . The derivation of the pricing rule (13) can be understood as an application of the indifference pricing approach. This method became increasingly popular in the context of pricing contingent claims in incomplete markets (c.f. Xu, Odening and Mußhoff 2008).

What happens in the presence of basis risk, i.e.,  $\Theta \neq \Theta_h$ ? It is convenient to introduce the conditional certainty equivalent  $X(\Theta)$  of the actual farmer's loss  $\Theta_h$  which is defined as

$$X(\Theta) = \frac{1}{\gamma_F} \cdot \ln E[\exp(\gamma_F \cdot \Theta_h) | \Theta] \quad (14)$$

To solve the modified problem we simply replace  $\Theta$  by  $X(\Theta)$  in the objective function of the program (8a). Carrying out similar steps as before yields the optimal compensation function

$$J^{*b}(X(\theta)) = \frac{\gamma_F}{\gamma_F + \gamma_B} \cdot X(\theta) \quad (15)$$

$J^{*b}$  stands for the optimal compensation with basis risk. The only difference compared with the solution without basis risk is that the insured loss  $\Theta$  is replaced by the certainty equivalent of the actual loss given a realization of the insured loss. For a better understanding of the implication of this modification we assume that the basis risk is additive, i.e.  $\Theta_h = \Theta + \varepsilon$ ,  $E(\varepsilon) = 0$ ,  $Var(\varepsilon) = \sigma^2$ . In other words, the distribution of the actual loss  $\Theta_h$  is a mean preserving spread of the insured loss. It can be easily seen that the following relation between  $\Theta$  and  $X(\Theta)$  holds:

$$X(\Theta) = \Theta + C \quad (16)$$

where  $C$  denotes a constant. The immediate consequence is that the modified compensation function will in general not comply with the constraint  $J(\Theta) \leq \Theta$ . However, this can be ensured by introducing a deductible which amounts to  $C$ . Inserting this into eq. (15) reveals that the optimal compensation under additive basis risk is the same as without basis risk.

In the second part of the transaction (the securitization transaction), the insurer plays the active role. That means, the parameters of the weather bond (the price  $\Phi$ , coupon value  $s$ , and the share of losses  $\alpha$ ) are chosen such that the expected utility of the insurer is maximized given his risk exposition from the insurance transaction, whereas the investor only has to decide to accept or refuse the contract offer. The formal structure of this optimization program is similar to (8):

$$\max_{\Phi, s, \alpha} E \left[ -\exp \left( -\gamma_B \cdot \left( \pi \cdot \beta_n - J(\Theta) + \Phi \cdot \beta_n - s \cdot \sum_{t=1}^n \beta_{n-t} - N + \alpha(\Theta) \right) \right) \right] \quad (17a)$$

s.t.

$$E\left[-\exp\left(-\gamma_I \cdot \left(-\Phi \cdot \beta_n + s \cdot \sum_{t=1}^n \beta_{n-t} + N - \alpha(\Theta)\right)\right)\right] \geq -1 \quad (17b)$$

The Hamiltonian for this problem is

$$H = -\exp(-\gamma_B \cdot (\pi \cdot \beta_n - J(\theta) - \Lambda + \alpha(\theta))) - \lambda \cdot \exp(-\gamma_I (\Lambda - \alpha(\theta))), \quad (18)$$

with  $\Lambda = -\Phi \cdot \beta_n + s \cdot \sum_{t=1}^n \beta_{n-t} + N$ . From the FOC, we obtain

$$\alpha^* = \frac{\gamma_B}{\gamma_B + \gamma_I} \cdot J(\Theta) + \Lambda - \frac{\gamma_B}{\gamma_B + \gamma_I} \cdot \pi \cdot \beta_n - \frac{1}{\gamma_B + \gamma_I} \ln \frac{\lambda \cdot \gamma_I}{\gamma_B} \quad (19)$$

In order to simplify this expression, we impose the restriction that  $\alpha^*$  must be zero if the weather event does not occur and, hence, no compensation takes place. It follows that

$$\Lambda - \frac{\gamma_B}{\gamma_B + \gamma_I} \cdot \pi \cdot \beta_n - \frac{1}{\gamma_B + \gamma_I} \ln \frac{\lambda \cdot \gamma_I}{\gamma_B} = 0 \quad (20)$$

Inserting (12) and (20) into (19) gives the optimal  $\alpha$ :

$$\alpha^* = \frac{\gamma_B \cdot \gamma_F}{(\gamma_B + \gamma_F) \cdot (\gamma_B + \gamma_I)} \cdot \theta \quad (21)$$

Obviously the optimal recovery  $\alpha^*$  is proportional to the insured loss and depends on the relation of the risk aversion of all involved agents.

The optimal value of the net cash flow for the investor,  $\Lambda$ , is independent of the weather event and can be determined using similar arguments as in the case of the calculation of the optimal insurance premium  $\pi$ . Inserting (21) into the binding participation constraint in (17b) yields

$$\Lambda^* = -\Phi^* \cdot \beta_n + s^* \cdot \sum_{t=1}^n \beta_{n-t} + N = \frac{1}{\gamma_I} \cdot \ln E\left[\exp\left(\frac{\gamma_I \cdot \gamma_B \cdot \gamma_F}{(\gamma_B + \gamma_F) \cdot (\gamma_B + \gamma_I)} \cdot \Theta\right)\right]. \quad (22)$$

The optimal bond price is then given by

$$\Phi^* = \frac{1}{\beta_n} \cdot \left\{ s^* \cdot \sum_{t=1}^n \beta_{n-t} + N - \frac{1}{\gamma_I} \cdot \ln E\left[\exp\left(\frac{\gamma_I \cdot \gamma_B \cdot \gamma_F}{(\gamma_B + \gamma_F) \cdot (\gamma_B + \gamma_I)} \cdot \Theta\right)\right] \right\}. \quad (23)$$

(23) reveals an interesting feature of the optimal bond price. Recalling that the “fair price,”  $\Phi_{fair}^*$ , of a contingent claim is defined as the expected value of its discounted net cash flow, we find that

$$\Phi_{fair}^* = \frac{1}{\beta_n} \cdot \left\{ s^* \cdot \sum_{t=1}^n \beta_{n-t} + N - \frac{\gamma_B \cdot \gamma_F}{(\gamma_B + \gamma_F) \cdot (\gamma_B + \gamma_I)} \cdot E(\Theta) \right\} \quad (24)$$

A comparison of (23) and (24) shows that the weather bond can be offered at a price which is lower than the “fair price.”

Note that there is an indeterminacy concerning the optimal bond structure. The optimal recovery  $\alpha^*$  determines the optimal net cash flow  $\Lambda^*$  uniquely, but the relation between the optimal bond price  $\Phi^*$  and the optimal coupon  $s^*$  can be chosen arbitrarily. We consider two common cases. In the first case, the bond is offered at a discount, i.e., the discounted principal payment is equal to the bond price,  $\Phi^* = N \cdot \beta_n^{-1}$ . In the second case, the bond is offered at par, i.e., the principal payment is equal to the bond price,  $\Phi^* = N$ .

The optimal coupon payments for the two cases are then given by

$$s^{1*} = \left( 1 / \sum_{t=1}^n \beta_{n-t} \right) \cdot \frac{1}{\gamma_I} \cdot \ln E \left[ \exp \left( \frac{\gamma_I \cdot \gamma_B \cdot \gamma_F}{(\gamma_B + \gamma_F) \cdot (\gamma_B + \gamma_I)} \cdot \Theta \right) \right] \quad (25)$$

and

$$s^{2*} \cdot \sum_{t=1}^n \beta_{n-t} = \Phi \cdot (\beta_n - 1) + \frac{1}{\gamma_I} \cdot \ln E \left[ \exp \left( \frac{\gamma_I \cdot \gamma_B \cdot \gamma_F}{(\gamma_B + \gamma_F) \cdot (\gamma_B + \gamma_I)} \cdot \Theta \right) \right] \quad (26)$$

In the exposition so far, the principal payment  $N$  was considered as an exogenous parameter. From a marketing viewpoint, however, it might be desirable to offer a certain return  $r_{bond}$  (before stochastic recoveries) to the investor which should clearly exceed the riskless interest rate  $r$ . The definition  $r_{bond} = s^* / \Phi$  then implies the bond price

$$\Phi = \frac{s^*}{r_{bond}} \quad (27)$$

### 3 Securitization of weather risk in northeast Germany

Weber et al. (2008) conduct a survey among 249 farmers in northeast Germany on the economic consequences of draught risk and the willingness to pay for weather insurance. The poll held among the farmers revealed that every single one of the polled farmers had been affected by drought at least once during the previous decade: 50% of those polled indicated that they had been affected more than three times; 88% of the cases reported as high as between two and five occurrences, and only 3% of those polled stated that they had never been affected by drought. The farmers also estimated that the harvest risk due to drought was of corresponding importance. It represented the most important harvest-relevant weather event

for 80% of those polled, followed by hail (55%), temperature (49%), and storms (25%). Furthermore, it was clear that 69% of those polled lost between 20 and 40% of their harvests in the event of drought. Collectively, 90% of the agriculturalists suffered harvest losses between 0% and 40%, and 10% indicated damages of 40-60%. Against that background it is not surprising that farmers indicated considerable interest in drought insurance. However, another finding from this survey was that farmers are less willing to pay than the insurers are willing to accept the insurance arrangement. Hence under the prevailing conditions, it is unlikely that a market for weather insurances will emerge in this region. Reinsurance costs constitute a major component of insurance premiums. This is the motivation for designing a weather bond which reduces those costs and, thereby, makes it possible to offer weather insurance at lower prices. In the following, we will apply the theoretical model of the previous section to the specific situation in northeast Germany.

### 3.1 Data and model assumptions

In our application, we focus on wheat production which is a major crop in northeast Germany, particularly in Brandenburg. Wheat yield data (in € per hectare) was collected from a representative cash crop farm during a period of time between 1993 and 2007. For the specification of the relationship between weather and revenues, we followed Vedenov and Barnett (2004) who suggest a model which is quadratic in deviations of temperature and rainfall. The weather variables are derived from the daily temperature and daily precipitation data recorded at the weather station in Berlin-Tempelhof. Significant parameter estimates were made for the following model specification:

$$Y_t = I_t + \varepsilon_t \quad (28)$$

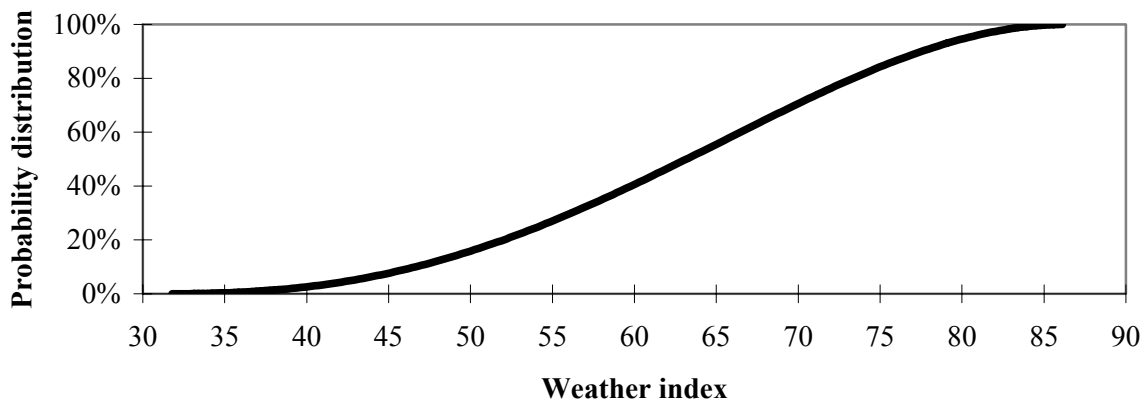
with

$$I_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot \Delta T_t^{June} + \beta_2 \cdot (\Delta T_t^{April})^2 + \beta_3 \cdot (\Delta R_t)^2 + \beta_4 \cdot \Delta R_t \cdot \Delta T_t^{April} + \beta_5 \cdot \Delta R_t \cdot \Delta T_t^{June} \quad (29)$$

Herein,  $Y_t$  denotes wheat production revenues,  $I_t$  is a weather index at time  $t$ ,  $\varepsilon_t \sim N[0, \sigma_\varepsilon]$  is a normally distributed error term, and  $\Delta$  measures the deviation of a weather variable from its long-term average.  $T_t^{April}$  and  $T_t^{June}$  represent the average monthly temperatures for April and June.  $R_t$  represents the cumulated precipitation in the period April 1 until June 30. The estimated parameters (p-values) are  $\beta_0 = 65.73$  (0.0000),  $\beta_1 = -3.97$  (0.0176),  $\beta_2 = -3.09$  (0.0134),  $\beta_3 = 0.0017$  (0.0039),  $\beta_4 = -0.14$  (0.0052) and  $\beta_5 = 0.14$  (0.0023). An  $R^2$  of 0.85 indicates that the selected weather index can effectively explain the wheat yield in Brandenburg. The model specification is also supported by the corrected Akaike information criterion.

Subsequent to the estimation of the model (29), we fit a parametric distribution for the weather index using standard test procedures. The best fit is attained by a Beta distribution which is shown in Figure 2. The expected value for the weather index amounts to 63.18 points, and the standard deviation is 11.46 points. According to (28), this distribution may also be interpreted as a yield distribution. Multiplying the stochastic yield with a constant wheat prices of 11.22 €/dt gives the wheat production revenues,  $Rev(I_t)$ .

**Figure 2 Cumulative probability distribution of weather index**



In our model, we assume that the farmer can buy the insurance contract on 1 July 2007 and will receive a certain indemnity payment on June 30, 2008, if unfavourable weather occurs. That is, we consider a two-date insurance contract from  $t = 0$  to  $t = 1$  over a contract period of 1 year ( $n = 1$ ). One contract refers to one hectare.

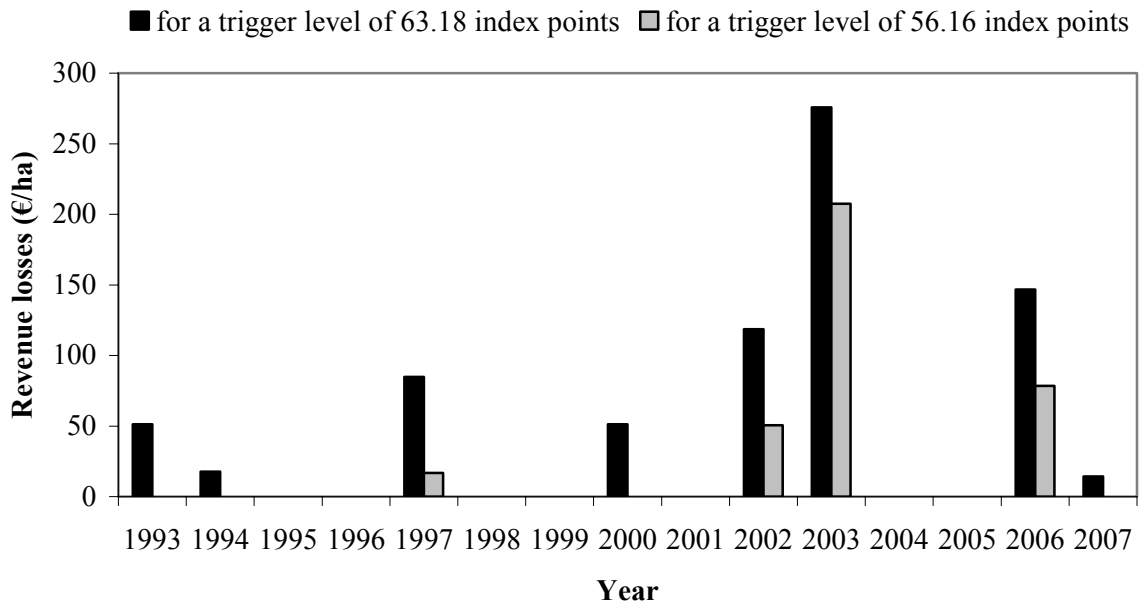
Next, we have to specify the indemnity trigger (strike-level)  $\bar{I}$ . We assume that the farmer will receive an insurance payoff if the weather index falls below its 50% quantile 63.18 points. This corresponds to revenues of 708.88 € per hectare. In a second scenario, we define another trigger level which equals a 30% percentile of the weather index distribution and amounts to 56.16 points (630.12 € per ha). This is equivalent to introducing a deductible amount of 78.76 € per ha.

The revenue loss  $\theta$  equals the positive difference between the actual revenues and the revenues at the predetermined indemnity trigger  $Rev(\bar{I})$  and the actual revenues  $Rev(I_t)$ . That means eq.(2) has the specific form:

$$\theta = f(I_t) = \max(0, Rev(\bar{I}) - Rev(I_t)) \quad (30)$$

Figure 3 presents the insured revenue losses in accordance with the predetermined indemnity triggers for the observation period 1993 - 2007. Apparently, in some years, considerable losses occurred that could jeopardize the farmers' liquidity.



**Figure 3 Insured revenue losses for different indemnity triggers.**

The optimal risk transfer structure depends on the risk aversion of the involved contract partners, and, hence, we have to make assumptions about those parameters. In accordance with Xu, Odening, and Mußhoff (2007), we assume an absolute risk aversion parameter of  $8 \cdot 10^{-6}$  for the base scenario. Since the risk aversion is a crucial parameter, we carry out variant calculations with different values. Furthermore, we assume a risk free interest rate  $r$  of 3.21% (the four year average of the return on German state bonds). The return for the investor without damage occurrence ( $= s/\Phi$ ) should exceed the risk free interest and is fixed at 5%.

### 3.2 Results and Discussion

Table 1 presents the optimal risk transfer structure. The results are based on a stochastic simulation with 10,000 random draws from the estimated Beta distribution of the weather index. The columns in Table 1 represent different degrees of the three agents' risk aversion. In case 1, all the market participants have the same absolute risk aversion. In that case, the compensation ratio ( $J/\theta$ ) amounts to 50%. That means that the insurer is willing to compensate for half of the actual (discounted) loss of the farmer (27.51 €). It is interesting to note that the insurance premium  $\pi$  is only slightly higher than the discounted expected loss  $E(J) \cdot \beta_1^{-1}$ , which can be interpreted as the actuarially fair price. In other words, the risk loading is negligible. This can be explained by the fact that 25% of the insured losses, i.e., €14.20 per contract, are transferred to the investor. In order to define the cash flow structure between the insurer and investor, one has to decide whether the bond is offered at a discount or at par. First, we consider the former case in which the principal payment  $N$  equals the compound bond price  $\Phi \cdot \beta_1$  at the end of the contract period. The bond price  $\Phi$  amounts to €284.10 which is virtually the same as the actuarially fair price. The coupon,  $s^1$ , is determined accord-

ing to eq. (25) and amounts to €14.21. One can easily verify the fact that the return without recoveries matches the desired value of 5%. The investor's expected net return (i.e., the return after a correction for the recovery  $\alpha$ ) is nearly to 0.00% (0.00056%). For the interpretation of this return, one should recall the fact that the bond was sold at a discount and, hence, the 0.00056% represents an (expected) return above the risk free interest rate of 3.21%. On the average, the coupon payments are sufficient to cover the investor's recovery. However, in the (unlikely) event of a total loss, the investor has to repay 283.55 € and is left with a negative return of -17.42%

Next, we consider the case in which the bond is offered at par, i.e., the principal  $N$  at the time of expiration equals the bond price  $\Phi$ . Compared with the previous case, the principal payment, the bond price, and the coupon are about 2.5 times higher. According to eq. (26), the coupon  $s^2$  is equal to  $s^1$  plus  $\Phi \cdot r$ . Hence,  $s^2$  must be higher in order to satisfy the constraint in (17a). The resulting expected net return for the investor is 3.27%.

In case 2, the risk aversion parameters of all market participants are increased by a factor of one thousand. Compared to the base case, both the losses that are transferred from the farmer to the insurer and from the insurer to the investor remain unchanged. However, the insurance premium  $\pi$  is significantly higher than in case 1 due to the increased risk aversion of the insurer. For the securitization part, we observe an increase in the coupon  $s^1$  and a decrease in the recovery-coupon-ratio. In view of the higher risk aversion of the investor, the insurer has to pay a higher coupon and receives on the average only 89% of the coupon back from the investor as a compensation for the losses from the insurance transaction. The wedge between the optimal bond price and the fair price becomes visible now, but it is still rather small.

In scenarios 3 to 5, we change the relations of the risk aversion parameters of the market participants. More precisely, the risk aversion parameters of the insurer (case 3), of the investor (case 4), and of both (case 5) are reduced. In case 3, the production losses are almost completely compensated for by the insurer, while only 1% of production losses are transferred to the capital market. In case 4, the farmer's compensation ratio as well as the risk transfer ratio of the insurer amount to 50%. That means that the insurer completely transfers the weather risk to the capital market. In case 5, almost all of the farmer's revenue losses are transferred to the insurer.

Finally, we reduce the indemnity trigger from 63.18 index points to 56.16 index points (case 6). The risk aversion parameters are the same as in scenario 5. Accordingly, the compensation ratio  $J/\theta$  and the risk transfer ratio  $\alpha/\theta$  are unchanged. However, due to the lower indemnity trigger, we observe a lower discounted, expected loss of €24.70 per ha. All other values change proportionally.

**Table 1 Optimal risk transfer structure of yield losses\***

		<i>Case 1</i>	<i>Case 2</i>	<i>Case 3</i>	<i>Case 4</i>	<i>Case 5</i>	<i>Case 6</i>
<b>Varied parameters</b>	Indemnity trigger (index points)	63.18					56.16
	Risk aversion of producer $\gamma_F$	$8 \cdot 10^{-6}$					$8 \cdot 10^{-6}$
	Risk aversion of insurer $\gamma_B$	$8 \cdot 10^{-6}$	$8 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-8}$	$8 \cdot 10^{-6}$	$8 \cdot 10^{-8}$	$8 \cdot 10^{-8}$
	Risk aversion of investor $\gamma_I$	$8 \cdot 10^{-6}$					$8 \cdot 10^{-8}$
<b>Insurance</b>	Compensation ratio $J/\theta$ (%)	50	50	99	50	99	99
	Discounted expected loss $E(\theta) \cdot \beta_1^{-1}$ (€)	55.02					24.70
	Discounted expected compensation $E(J) \cdot \beta_1^{-1}$ (€)	27.51	27.51	54.47	27.51	54.47	24.46
	Insurance premium $\pi$ (€)	27.51	34.53	54.47	27.51	54.47	24.46
<b>Securitization</b>	Risk transfer ratio $\alpha/\theta$ (%)	25	25	1	50	50	50
	Expected recoveries $E(\alpha)$ (€)	14.20	14.20	0.56	28.13	28.13	12.63
	<b>Specification 1:</b> $\Phi \cdot \beta_1 = N$						
	Principal $N$ (€)	293.38	328.38	11.50	580.89	580.89	260.84
	Bond price $\Phi$ (€)	284.10	318.00	11.14	562.52	562.52	252.59
	“Fair bond price” $\Phi_{fair}^*$ (€)	284.11	319.64	11.14	562.52	562.52	252.59
	Coupon $s^1$ (€)	14.21	15.90	0.56	28.13	28.13	12.63
	Expected net return of the investor $(s^1 - E(\alpha))/\Phi$ (%)	0.00	0.53	0.00	0.00	0.00	0.53
	Recovery-coupon-ratio $E(\alpha)/s^1$ (%)	99.99	89.33	100.00	100.00	99.99	89.33
	<b>Specification 2:</b> $\Phi = N$						
	Principal $N$ (€)	819.31	917.06	32.12	1622.22	1622.22	728.43
	Bond price $\Phi$ (€)	819.31	917.06	32.12	1622.22	1622.22	728.43
	“Fair bond price” $\Phi_{fair}^*$ (€)	819.31	918.70	32.12	1622.22	1622.22	728.43
	Coupon $s^2$ (€)	40.97	45.85	1.61	81.11	81.11	36.42
	Expected net return of the investor $(s^2 - E(\alpha))/\Phi$ (%)	3.27	3.45	3.27	3.27	3.27	3.27
	Recovery-coupon-ratio $E(\alpha)/s^2$ (%)	34.67	30.98	34.68	34.68	34.68	34.68

\* Constant parameters: risk free interest rate  $r = 3.21\%$ , and return for an investor without damage occurrence  $s/\Phi = 5\%$ .

## 4 Conclusions

In this paper we look for the optimal structure of a weather bond in which the production weather risk is transferred to the capital market, and three representative market participants (producer, insurer, and investor) are involved. We show that the indemnity payments made to the farmers are a linear function of the insured loss which depends on the stochastic weather event. The cost of insurance is a non-linear function of the indemnity payments capturing a risk premium for the insurer. The size of the risk premium depends on the risk aversion of the insurer and the farmer. These findings are in line with previous work on optimal risk sharing rules. Moreover, it is shown that the optimal price of the weather bond is lower than its actuarially fair price which is defined as the expected value of the bond's discounted cash flows. This surprising finding is important from a marketing perspective. However, in our application the difference is not very pronounced. Another finding is that the determination of the structure of the weather bond is ambiguous since there is an infinite amount of optimal combinations of coupon levels and bond prices. This fact can also be exploited for marketing purposes.

Apart from these theoretical insights, our paper is relevant for the ongoing discussion on how to hedge weather related risks. We argue that weather derivatives constitute efficient instruments for transferring risks to the capital market. This has two implications. First of all, the existence of systemic weather risk does not provide a justification for governmental intervention in insurance markets. Second, since reinsurance costs are a major component of insurance premiums, a reduction of those costs might help to reduce the frequently observed gap between the willingness to pay and the willingness to accept weather insurance.

## 5 References

- Barrieu, P. and N. El Karoui, 2002. Reinsuring Climatic Risk Using Optimally Designed Weather Bonds. Geneva Pap. Risk Insur. 27, 87-113.
- Doherty (1997): Innovations in Managing Catastrophe Risk. The J. Risk and Insur. 64, 713-718.
- Froot and O'Connell (1996): On the Pricing of Intermediated Risk: Theory and Application to Catastrophe Reinsurance, Working Paper 6011, National Bureau of Economic Research, Cambridge, MA.
- Mahul, O., 2001. Managing Catastrophic Risk through Insurance and Securitization. Amer. J. Agr. Econ. 83, 656-661.
- Miranda, M.J. and J.W. Glauber (1997): Systemic Risk, Reinsurance, and the Failure of Crop Insurance Markets. Amer. J. Agr. Econ. 79, 206-215.
- Raviv, A., 1979. The Design of an Optimal Insurance Policy. Amer. Econ. Rev. 69, 84-96.
- Richards, T.J., M.R. Manfredo and D.R. Sanders, 2004. Pricing Weather Derivatives. Amer. J. Agr. Econ. 86, 1005-1017.

- Skees, J.R., B.J. Barnett and A.G. Murphy, 2007. Creating Insurance Markets for Natural Disaster Risk in Lower Income Countries: The Potential Role for Securitization. 101st European Association of Agricultural Economists (EAAE) Seminar "Management of Climate Risks in Agriculture", July 5-6, 2007, Berlin.
- Turvey, C.G., 2005. The Pricing of Degree-Day Weather Options. *Agr. Fin. Rev.*, Spring 2005, 59-85.
- Turvey, C.G., 2007. The Pricing, Structure and Function of Weather-Linked Bonds, Mortgages and Operating Credit. Paper presented at the 101st EAAE Seminar 'Management of Climate Risks in Agriculture'. Berlin, Germany, July 5-6, 2007.
- Vedenov, D.V., J.E. Epperson and B.J. Barnett, 2006. Designing Catastrophe Bonds to Securitise Systemic Risks in Agriculture: The Case of Georgia Cotton. *J. Agr. Res. Econ.* 31, 318-338.
- Vedenov, D.V. and B.J. Barnett, 2004. Efficiency of Weather Derivatives as Primary Crop Insurance Instruments. *J. Agr. Res. Econ.* 29: 387-403.
- Weber, R., Kraus, T., Mußhoff, M., Odening, M., Rust, I. (2008): Risikomanagement mit indexbasierten Wetterversicherungen - Bedarfsgerechte Ausgestaltung und Zahlungsbereitschaft. In: Rentenbank (Hrsg.): Risikomanagement in der Landwirtschaft. Schriftenreihe der Rentenbank, Bd. 23 (im Druck).
- Xu, W., M. Odening and O. Mußhoff, 2008. Indifference Pricing of Weather Insurance. *Amer. J. Agr. Econ.* 90, 979-993.